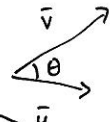
Föreläsning 5

1

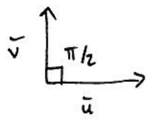
Skalärprodukt (forts.)

Skalärprodukt: $\bar{u}\cdot\bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$



Def: Vi säger att två vektorer är ortogonala om $\bar{u}\cdot\bar{v}=0$, och skriver $\bar{u}\perp\bar{v}$

Ex:



$\bar{u}\cdot\bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\overset{0}{\cos\frac{\pi}{2}} = 0$

ortogonal = vinkelrät

Räknelagar för skalärprodukt:

1) $\bar{u}\cdot\bar{u} = |\bar{u}|^2$ 2) $\bar{u}\cdot\bar{v} = \bar{v}\cdot\bar{u}$

3) $(\bar{u}_1+\bar{u}_2)\cdot\bar{v} = \bar{u}_1\cdot\bar{v} + \bar{u}_2\cdot\bar{v}$

4) $(\lambda\bar{u})\cdot\bar{v} = \bar{u}\cdot(\lambda\bar{v}) = \lambda(\bar{u}\cdot\bar{v})$

Ex: Låt $|\bar{u}|=3$, $|\bar{v}|=4$, $\theta=\pi/6$. Bestäm $|\bar{u}+\bar{v}|$!

$$|\bar{u}+\bar{v}|^2 \overset{1)}{=} (\bar{u}+\bar{v})\cdot(\bar{u}+\bar{v}) \overset{3)}{=} \bar{u}\cdot\bar{u}+\bar{u}\cdot\bar{v}+\bar{v}\cdot\bar{u}+\bar{v}\cdot\bar{v} =$$
$$\overset{1),2)}{=} |\bar{u}|^2 + 2(\bar{u}\cdot\bar{v}) + |\bar{v}|^2 = 3^2 + 2\cdot3\cdot4\cdot\cos\frac{\pi}{6} + 4^2 =$$
$$= 25 + 24\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 25 + 12\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow |\bar{u}+\bar{v}| = \sqrt{25+12\sqrt{3}}$$

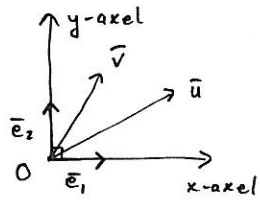
2

Def: Basen $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ i planet kallas ortonormerad om

(i) $|\bar{e}_1| = |\bar{e}_2| = 1$ (normerade)

(ii) $\bar{e}_1 \perp \bar{e}_2$, dvs. $\bar{e}_1\cdot\bar{e}_2 = 0$ (ortogonala)

Låt $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ vara en ortonormerad bas (ON-bas).



$\bar{u} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2$, $\bar{v} = y_1\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2$

$$\Rightarrow \bar{u}\cdot\bar{v} = (x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2)\cdot(y_1\bar{e}_1+y_2\bar{e}_2) =$$
$$= x_1y_1\underbrace{(\bar{e}_1\cdot\bar{e}_1)}_{|\bar{e}_1|^2=1} + x_1y_2\underbrace{(\bar{e}_1\cdot\bar{e}_2)}_{0} + x_2y_1\underbrace{(\bar{e}_2\cdot\bar{e}_1)}_{0} + x_2y_2\underbrace{(\bar{e}_2\cdot\bar{e}_2)}_{|\bar{e}_2|^2=1}$$
$$= x_1y_1 + x_2y_2$$

Dvs. $\boxed{(x_1,x_2)\cdot(y_1,y_2) = x_1y_1 + x_2y_2}$

Skalärprodukter lätta att beräkna i ON-bas!

Speciellt, $|\bar{u}|^2 = \bar{u}\cdot\bar{u} = (x_1,x_2)\cdot(x_1,x_2) = x_1^2+x_2^2$

$\Rightarrow |\bar{u}| = \sqrt{x_1^2+x_2^2}$ (Pythagoras sats!)

Motsvarande gäller i rummet, dvs.

$e_1e_2e_3$ är en ON-bas om (i) $|\bar{e}_1|=|\bar{e}_2|=|\bar{e}_3|=1$,
(ii) $\bar{e}_1\perp e_2, \bar{e}_1\perp e_3, \bar{e}_2\perp e_3$

3

$$(x_1,x_2,x_3)\cdot(y_1,y_2,y_3) = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3,$$

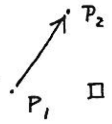
och $|\bar{u}| = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$

Ex: Bestäm avståndet mellan punkterna $P_1:(1,0,4)$ och $P_2:(3,-1,2)$. (ON-system)

Lösning: $\overline{P_1P_2} = (3,-1,2) - (1,0,4) =$ (ON-bas + origo)

$= (2,-1,-2)$

$\Rightarrow |\overline{P_1P_2}| = |(2,-1,-2)| = \sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2} = \underline{\underline{3}}$ □



Ex: Bestäm vinkeln mellan $\bar{u}=(4,1,1)$ och $\bar{v}=(2,2,-1)$! (ON-system)

Lösning:

$\bar{u}\cdot\bar{v} = (4,1,1)\cdot(2,2,-1) = 4\cdot2+1\cdot2+1\cdot(-1) = 9$

$|\bar{u}| = \sqrt{4^2+1^2+1^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

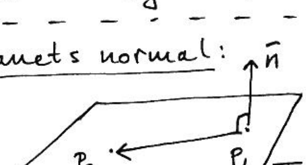
$|\bar{v}| = \sqrt{2^2+2^2+(-1)^2} = 3$

$\Rightarrow \bar{u}\cdot\bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta = 3\sqrt{2}\cdot3\cdot\cos\theta = 9$

$\Leftrightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ $(0\le\theta\le\pi)$ □

I fortsättningen kommer vi anta att vi har ett ON-system.

Planets normal:



$\Pi: Ax+By+Cz+D=0$

$P_1: (x_1,y_1,z_1)$

$P_2: (x_2,y_2,z_2)$

4

$$\begin{cases} Ax_1+By_1+Cz_1+D=0 & (1)\\ Ax_2+By_2+Cz_2+D=0 & (2)\end{cases}$$

(2) − (1) ger

$A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)+C(z_2-z_1) = 0$

$\Leftrightarrow (A,B,C)\cdot(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1) = 0$

$\Leftrightarrow (A,B,C)\cdot\overline{P_1P_2} = 0$ OBS!

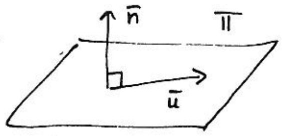
$\overline{P_1P_2}$ godtycklig vektor i planet Π

$\Rightarrow$ $\boxed{\bar{n} = (A,B,C) \text{ ortogonal mot planet}}$

Vektorn $\bar{n}$ kallas normalvektor till planet Π.

Ex: Är $\bar{u} = (2,1,-3)$ parallell med planet $\Pi: 2x-y+z+4=0$?

Lösning: $\bar{u}$ är parallell med Π om $\bar{u}\perp\bar{n} = (2,-1,1)$



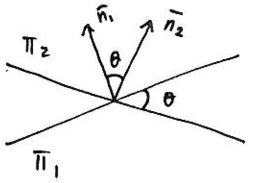
Vi kollar: $\bar{u}\cdot\bar{n} = (2,1,-3)\cdot(2,-1,1) = 2\cdot2+1\cdot(-1)+(-3)\cdot1 = 0$

Svar: Ja!

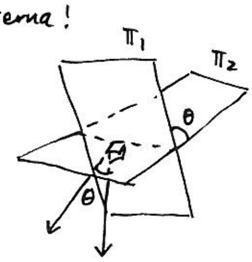
Ex: Bestäm vinkeln mellan planen

$\Pi_1: 4x+y+z+2=0$ och $\Pi_2: 2x+2y-z-1=0$.

Lösning: Vinkeln mellan planen är samma som vinkeln mellan normalvektorerna!



(genomskärning)



Svar: $\frac{\pi}{4}$ (se exempel ovan!) $\qquad \bar n_1 = (4,1,1)$, $\bar n_2 = (2,2,-1)$

Ex: Bestäm en ekvation för planet π genom punkten $P:(2,1,2)$ och med normalvektor $\bar n = (-1,7,3)$.

Lösning: Vi får $\pi: -x+7y+3z+D=0$ för någon konstant D. Sätt in P:

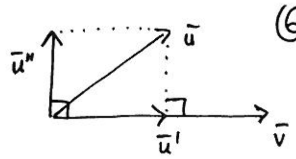
$$-2+7\cdot 1+3\cdot 2+D=0 \iff D=-11$$

Svar: $\pi: -x+7y+3z-11=0$

Ex: Dela upp vektorn $\bar u=(0,-1,3)$ i två komposanter $\bar u', \bar u''$ sådana att $\bar u' \perp \bar u''$, och $\bar u'$ är parallell med $\bar v=(2,1,1)$.

Lösning: Använd projektionsformeln! (Föreläsning 4)

$$\bar u' = \left(\frac{\bar u\cdot \bar v}{|\bar v|^2}\right)\bar v = \frac{0\cdot 2+(-1)\cdot 1+3\cdot 1}{2^2+1^2+1^2}(2,1,1) = \frac{1}{3}(2,1,1) \Rightarrow \bar u'' = \bar u - \bar u' = (0,-1,3)-\frac{1}{3}(2,1,1) = \frac{1}{3}(-2,-4,8)$$



Svar: $\bar u = \bar u' + \bar u'' = \frac{1}{3}(2,1,1)+\frac{1}{3}(-2,-4,8)$

Sats (Viktig!) $\bar e_1, \bar e_2, \bar e_3$ ON-bas i rummet.
Om $\bar u = x_1\bar e_1 + x_2\bar e_2 + x_3\bar e_3$, så är $x_i = \bar u\cdot \bar e_i$ $(1\le i\le 3)$

Bevis: För t.ex. $i=1$ gäller

$$\bar u\cdot\bar e_1 = (x_1\bar e_1+x_2\bar e_2+x_3\bar e_3)\cdot\bar e_1 = x_1\overset{=1}{(\bar e_1\cdot\bar e_1)}+x_2\overset{=0}{(\bar e_2\cdot\bar e_1)}+x_3\overset{=0}{(\bar e_3\cdot\bar e_1)} = x_1$$

Ex: $\bar e_1' = \frac{1}{\sqrt 2}(1,0,-1)$, $\bar e_2' = \frac{1}{\sqrt 6}(1,2,1)$, $\bar e_3' = \frac{1}{2\sqrt 3}(2,-2,2)$

är en ON-bas, ty (i) $|\bar e_1'|=|\bar e_2'|=|\bar e_3'|=1$ (kolla!)
(ii) $\bar e_1'\cdot\bar e_2' = \bar e_1'\cdot\bar e_3' = \bar e_2\cdot\bar e_3' = 0$ (kolla!)

Antag att $\bar u = (1,1,1)$ m.a.p basen $\bar e_1\bar e_2\bar e_3$.
Bestäm koord. för $\bar u$ m.a.p basen $\bar e_1', \bar e_2', \bar e_3'$!

Sats ger

$$\bar u = x_1'\bar e_1' + x_2'\bar e_2' + x_3'\bar e_3' \Rightarrow \begin{cases} x_1' = \bar u\cdot\bar e_1' = (1,1,1)\cdot\frac{1}{\sqrt 2}(1,0,-1) = 0 \\ x_2' = \bar u\cdot\bar e_2' = (1,1,1)\cdot\frac{1}{\sqrt 6}(1,2,1) = \frac{4}{\sqrt 6} \\ x_3' = \bar u\cdot\bar e_3' = (1,1,1)\cdot\frac{1}{2\sqrt 3}(2,-2,2) = \frac{1}{\sqrt 3}\end{cases}$$

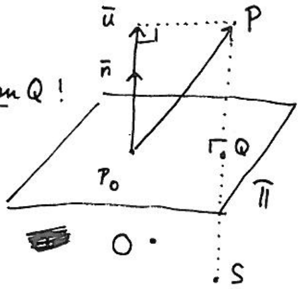
Svar: $\bar u = \left(0, \frac{4}{\sqrt 6}, \frac{1}{\sqrt 3}\right)$ m.a.p basen $\bar e_1'\bar e_2'\bar e_3'$.

Ortogonal projektion/spegling

Ex: $\pi: -3x+2y-z+1=0$
$P: (2,-3,1)$

a) Bestäm ortogonala projektionen Q!

b) Bestäm spegelbilden S!



Lösning:

a) Planets normalvektor $\bar n = (-3,2,-1)$.
Välj punkt i planet, t.ex. $P_0:(0,0,1) \Rightarrow$
$\overline{P_0P} = (2,-3,0)$. Låt $\bar u$ vara den ort. projektionen av $\overline{P_0P}$ på normalv. $\bar n$. Proj. formeln ger

$$\bar u = \left(\frac{\overline{P_0P}\cdot\bar n}{|\bar n|^2}\right)\bar n = \frac{2\cdot(-3)+(-3)\cdot 2+0\cdot(-1)}{(-3)^2+2^2+(-1)^2}(-3,2,-1) = -\frac{6}{7}(-3,2,-1)$$

$$\Rightarrow \overline{OQ} = \overline{OP} - \underbrace{\overline{QP}}_{=\bar u} = (2,-3,1)-\left(-\tfrac{6}{7}\right)(-3,2,-1) = \tfrac{1}{7}(-4,-9,1)$$

Svar: $Q: \frac{1}{7}(-4,-9,1)$

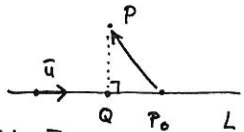
b) Speglingen $\overline{OS} = \overline{OP} - \overline{SP} = \overline{OP} - 2\bar u = (2,-3,1) - 2\left(-\frac{6}{7}\right)(-3,2,-1) = \frac{1}{7}(-22,3,-5)$

Svar: $S: \frac{1}{7}(-22,3,-5)$

Ex: Bestäm (minsta) avstånd från $P:(1,2,1)$ till linjen $L: (x,y,z) = (-2,1,1)+t(2,-2,1)$.

Lösning: Välj punkt P_0 på L, t.ex. $P_0:(-2,1,1)$.

$\overline{P_0P} = \overline{P_0Q} + \overline{QP} \Rightarrow \overline{QP} = \overline{P_0P} - \overline{P_0Q}$



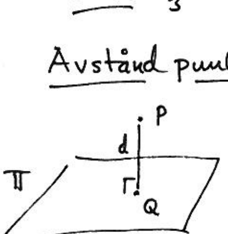
Vektorn $\overline{P_0Q}$ fås genom ort. proj. av $\overline{P_0P}$ på L:s riktn.vektor $\bar u$, t.ex $\bar u = (2,-2,1)$. Vi får

$$\overline{P_0Q} = \left(\frac{\overline{P_0P}\cdot\bar u}{|\bar u|^2}\right)\bar u = \left(\frac{(3,1,0)\cdot(2,-2,1)}{2^2+(-2)^2+1^2}\right)(2,-2,1) = \frac{4}{9}(2,-2,1) \Rightarrow \overline{QP} = \overline{P_0P} - \overline{P_0Q} = (3,1,0) - \frac{4}{9}(2,-2,1) = \frac{1}{9}(19,17,-4)$$

Slutligen $|\overline{QP}| = \sqrt{\left(\frac{19}{9}\right)^2+\left(\frac{17}{9}\right)^2+\left(\frac{-4}{9}\right)^2} = \frac{\sqrt{74}}{3}$

Svar: $\frac{\sqrt{74}}{3}$

Avstånd punkt/plan: (använd projektion; se exempel ovan)



$P: (x_0,y_0,z_0)$ $\quad \pi: Ax+By+Cz+D=0$

Kan sammanfattas i en avståndsformel:

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$

Bevis: Läs själva i boken!