Föreläsning 3

Fråga: Hur kan man testa om ett antal vektorer är en bas?

Def: Låt $\bar{v}, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_k$ vara vektorer. Om det finns tal $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ så att

$$\bar{v} = \lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2 + \cdots + \lambda_k\bar{u}_k$$

säger vi att $\bar{v}$ är en linjärkombination av $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_k$.

Ex: Är $\bar{v} = (-10, 4, 24)$ en linjärkombination av $\bar{u}_1 = (-1, 2, 3)$ och $\bar{u}_2 = (2, 4, -3)$?

Lösning: Finns det tal λ_1, λ_2 så att $\bar{v} = \lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2$?

Vi kollar: $(-10, 4, 24) = \lambda_1(-1, 2, 3) + \lambda_2(2, 4, -3)$

$\Leftrightarrow (-10, 4, 24) = (-\lambda_1 + 2\lambda_2, 2\lambda_1 + 4\lambda_2, 3\lambda_1 - 3\lambda_2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 + 2\lambda_2 = -10 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 4 \\ 3\lambda_1 - 3\lambda_2 = 24 \end{cases} \underset{\text{Gauss.el.}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -\lambda_1 + 2\lambda_2 = -10 \\ 8\lambda_2 = -16 \\ 3\lambda_2 = -6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 6 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

Svar: Ja! (Lösning existerar)

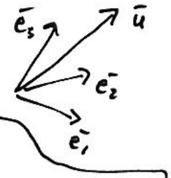
Def: Vektorerna $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_k$ kallas linjärt beroende om någon av dem är en linjärkombination av de övriga (annars linjärt oberoende).

Ex: $\bar{v}, \bar{u}_1, \bar{u}_2$ i exemplet ovan är linj. beroende.

Ex: Om $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ är en bas för rummet och $\bar{u}$ en annan vektor i rummet så är $\bar{u}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ linjärt beroende. Varför?

Jo, $\bar{u} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3$ eftersom $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ bas

$\Rightarrow \bar{u}$ linj. komb. av $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$



Sats (Bassatsen)

(i) två vektorer i planet är en bas $\Leftrightarrow$ de är linjärt oberoende

(ii) tre vektorer i rummet är en bas $\Leftrightarrow$ de är linjärt oberoende

(iii) a) fler än två vektorer i planet är linj. beroende
b) fler än tre vektorer i rummet är linj. beroende

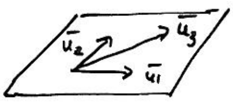
Bevis: (ii): Vi visar i stället (tänk!)

(ii)' tre vektorer linj. beroende $\Leftrightarrow$ de ligger i samma plan

$\Rightarrow$) $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ linj. ber $\Rightarrow$ t.ex. $\bar{u}_3 = \lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2$

$\Rightarrow \bar{u}_3$ ligger i planet (alt. linjen) som $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ spänner upp.

Alla i samma plan!



$\Leftarrow$) $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ i samma plan ger två fall:

1) $\bar{u}_1 \parallel \bar{u}_2 \Rightarrow$ t.ex. $\bar{u}_1 = \lambda\bar{u}_2 + 0\cdot\bar{u}_3$
parallell
$\Rightarrow$ linj. beroende

2) $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ bas för planet $\Rightarrow \bar{u}_3 = \lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2$
$\Rightarrow$ linj. beroende VSB!

Fråga: Hur kan man testa om man har en bas?

Svar: Kolla linjärt beroende/oberoende

Sats: $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_k$ vektorer.

Bilda ekvationen $\lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2 + \cdots + \lambda_k\bar{u}_k = \bar{0}$

(i) $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_k$ linj. beroende $\Leftrightarrow$ det finns lösning med något $\lambda_i \neq 0$.

(ii) $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_k$ linj. oberoende $\Leftrightarrow$ enda lösningen är $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$.

Bevis: Räcker visa (i).

$\Rightarrow$) Antag $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_k$ linj. beroende

$\Rightarrow$ t.ex. $\bar{u}_k = \lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2 + \cdots + \lambda_{k-1}\bar{u}_{k-1}$

$\Rightarrow \lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2 + \cdots + \lambda_{k-1}\bar{u}_{k-1} + \lambda_k\bar{u}_k = \bar{0}$

där $\lambda_k = -1 \neq 0$.

$\Leftarrow$) Antag $\lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2 + \cdots + \lambda_k\bar{u}_k = \bar{0}$ och något $\lambda_i \neq 0$ (t.ex. $\lambda_k \neq 0$)

$$\Rightarrow \bar{u}_k = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\bar{u}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_k}\bar{u}_2 - \cdots - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k}\bar{u}_{k-1}$$

$\Rightarrow \bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_k$ linj. beroende VSB!

Ex: Är vektorerna $\bar{u}_1 = (1, 1, 2)$, $\bar{u}_2 = (1, -1, 1)$, $\bar{u}_3 = (7, 1, 11)$ en bas för rummet?

Lösning: Kolla linjärt beroende!

$$\lambda_1(1,1,2)+\lambda_2(1,-1,1)+\lambda_3(7,1,11)=(0,0,0)=\bar{0}$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1+\lambda_2+7\lambda_3,\ \lambda_1-\lambda_2+\lambda_3,\ 2\lambda_1+\lambda_2+11\lambda_3)=(0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+7\lambda_3=0\\ \lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=0\\ 2\lambda_1+\lambda_2+11\lambda_3=0\end{cases} \underset{\text{Gauss.el.}}{\Leftrightarrow} \begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+7\lambda_3=0\\ -2\lambda_1-6\lambda_3=0\\ 0=0\end{cases}$$

∞ många lösn.!

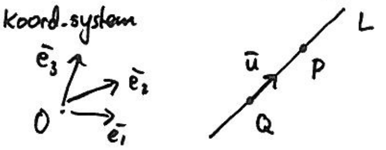
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1=-4t\\ \lambda_2=-3t\\ \lambda_3=t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}. \qquad (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=t(-4,-3,1)$$

Sätter vi in ett $t\neq 0$ får vi en lösning med något $\lambda_i\neq 0$ $\Rightarrow$ $\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3$ linj. beroende

$\underset{\text{bassatsen}}{\Rightarrow}$ $\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3$ ej bas för rummet.

3.2. Linjens ekvation (i planet/rummet)

- Hur kan man beskriva en linje i planet/rummet?
- Vilka egenskaper utmärker en linje?



Egenskaper:
- riktning (vektor)
- läge (punkt)

En linje L består av ∞ många punkter "i följd". Välj en punkt Q på L och en riktningsvektor $\bar{u}\neq\bar{0}$ på L. En punkt P ligger på L precis då $\overline{QP}=t\bar{u}$ för något tal t.

Om $Q:(x_0,y_0,z_0)$, $P:(x,y,z)$ och $\bar{u}=(a,b,c)$, så får vi

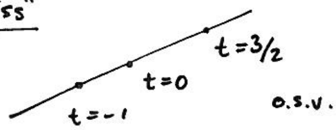
$$\overline{QP}=\overline{OP}-\overline{OQ}=(x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$$

och $\overline{QP}=t\bar{u} \Leftrightarrow (x-x_0,y-y_0,z-z_0)=t(a,b,c)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=x_0+ta\\ y=y_0+tb\\ z=z_0+tc\end{cases}$$

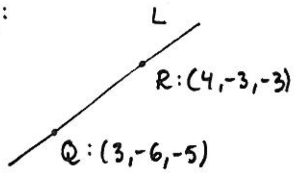
ekvation för L på parameterform

"Skiss"



Varje t motsvarar en punkt på linjen

Ex:



Bestäm en ekvation för L!

Riktn. vektor ges av

$$\bar{u}=\overline{QR}=\overline{OR}-\overline{OQ}=(4,-3,-3)-(3,-6,-5)=(1,3,2)$$

L går genom punkten Q $\Rightarrow$

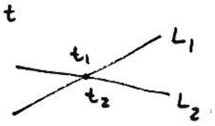
Svar:
$$\begin{cases}x=3+t\\ y=-6+3t\\ z=-5+2t\end{cases},\quad t\in\mathbb{R}$$

Ex: Ligger punkten $P:(-1,3,0)$ på linjen ovan?

I så fall måste
$$\begin{cases}-1=3+t\\ 3=-6+3t\\ 0=-5+2t\end{cases}$$
för något t.

$$\Leftrightarrow \begin{cases}t=-4\\ t=3\\ t=5/2\end{cases}$$
Nej!

Ex: Skär linjerna $L_1:\begin{cases}x=1+t\\ y=-1+2t\\ z=-t\end{cases}$ och $L_2:\begin{cases}x=3+2t\\ y=1+6t\\ z=1-5t\end{cases}$ varandra?



Lösning: Döp parametrarna till s och t och sätt ekv. lika:

$$\begin{cases}1+s=3+2t\\ -1+2s=1+6t\\ -s=1-5t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}s-2t=2\\ 2s-6t=2\\ -s+5t=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}s-2t=2\\ -2t=-2\\ 3t=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}s=4\\ t=1\end{cases}$$

Svar: Ja, i punkten $(5,7,-4)$

(Sätt in s eller t!)