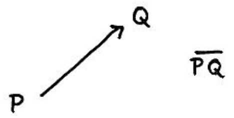
Föreläsning 2

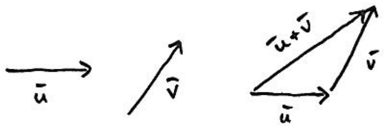
(1)

Repetition:

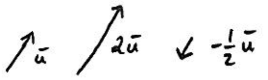
Vektor



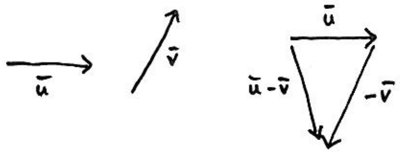
Addition



Multiplikation med tal

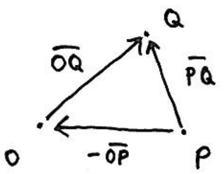


Subtraktion:



Nollvektor · betecknas $\bar 0$

$\overline{PQ} = \overline{OQ} - \overline{OP}$

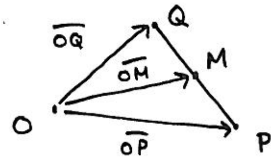


(2)

Mittpunktsformeln

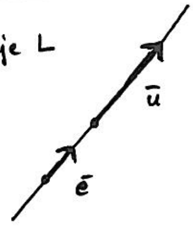
$$\overline{OM} = \frac{1}{2}(\overline{OP} + \overline{OQ})$$

M mittpunkt



2.3. Bas och koordinater

linje L



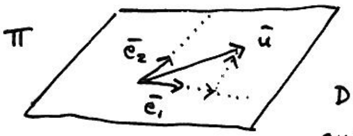
$\bar u$ vektor på L

$\bar e \neq \bar 0$ annan vektor på L

Då finns ett unikt tal x, så att $\bar u = x\bar e$.

> Vektorn $\bar e$ kallas bas för linjen L, och talet x kallas koordinaten för $\bar u$ m.a.p. basen $\bar e$.

Vektorer i planet:



$\bar u$ vektor i π

$\bar e_1, \bar e_2$ två icke-parallella vektorer i π.

Då kan varje vektor $\bar u$ i π entydigt skrivas

$\bar u = x_1\bar e_1 + x_2\bar e_2$ för några tal x_1, x_2.

(3)

Entydighet: Antag att $\bar u = x_1\bar e_1 + x_2\bar e_2 = x_1'\bar e_1 + x_2'\bar e_2$ för några olika talpar x_1, x_2 och x_1', x_2'.

Då följer att

$$(x_1 - x_1')\bar e_1 = (x_2' - x_2)\bar e_2,$$

och eftersom talparen är olika gäller t.ex. $x_1 \neq x_1'$.

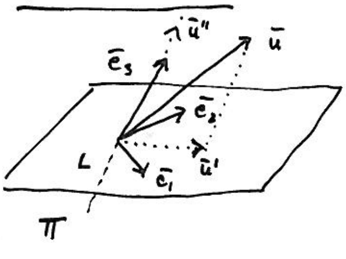
Vi får $\bar e_1 = \frac{(x_2' - x_2)}{(x_1 - x_1')}\bar e_2$, dvs. $\bar e_1$ och $\bar e_2$ parallella.

Motsägelse!

> Vektorerna $\bar e_1, \bar e_2$ är en bas för planet π, och x_1, x_2 kallas för koordinaterna för $\bar u$ m.a.p. basen $\bar e_1, \bar e_2$.

Anm: $\bar u = x_1\bar e_1 + x_2\bar e_2$ förkortas ofta $\bar u = (x_1, x_2)$.

Vektorer i rummet:



$\bar u$ vektor i rummet

$\bar e_1, \bar e_2, \bar e_3$ tre vektorer, ej alla i samma plan.

(4)

Då kan vektorn $\bar u$ entydigt skrivas

$$\bar u = x_1\bar e_1 + x_2\bar e_2 + x_3\bar e_3$$

för några tal x_1, x_2, x_3.

OBS! $\bar u = \bar u' + \bar u''$, $\bar u' = x_1\bar e_1 + x_2\bar e_2$, $\bar u'' = x_3\bar e_3$

Entydighet resoneras som tidigare.

Anm: $\bar u'$ kallas projektionen, parallell med linjen L, av vektorn $\bar u$ på planet π.

> Vi säger att $\bar e_1, \bar e_2, \bar e_3$ är en bas för rummet och x_1, x_2, x_3 är koordinaterna för $\bar u$ m.a.p. basen $\bar e_1 \bar e_2 \bar e_3$.

Anm: $\bar u = x_1\bar e_1 + x_2\bar e_2 + x_3\bar e_3 = (x_1, x_2, x_3)$

Ex: I en bas $\bar e_1, \bar e_2$ är $\bar u = (1,3)$, $\bar v = (-2,2)$.

Är $\bar u$ och $\bar v$ parallella vektorer?

Att $\bar u$ och $\bar v$ är parallella innebär att de ligger på samma linje, dvs. det finns tal x så att (t.ex.)

$$\bar u = x\bar v \iff (1,3) = x(-2,2)$$

$$\iff (1,3) = (-2x, 2x) \iff \begin{cases} 1 = -2x \\ 3 = 2x \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Saknar lösning! Ej parallella!

(5)

Ex: Duger $\bar{u}$ och $\bar{v}$ i exemplet ovan som en ny bas för planet?

Svar: Ja, de är icke-parallella.

Ex: Låt nu $\bar{u}, \bar{v}$ vara en ny bas. Hur kan man uttrycka den gamla basvektorn $\bar{e}_1$ i basen $\bar{u}, \bar{v}$?

Lösning: Vi löser följande ekvationssystem:

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 = \bar{u} \\ -2\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 = \bar{v} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 = \bar{u} \\ 8\bar{e}_2 = 2\bar{u} + \bar{v} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} \bar{e}_1 = \bar{u} - 3\bar{e}_2 = \frac{1}{4}\bar{u} - \frac{3}{8}\bar{v} \\ \bar{e}_2 = \frac{1}{4}\bar{u} + \frac{1}{8}\bar{v} \end{array}\right.$$

Svar: $\bar{e}_1 = \left(\frac{1}{4}, -\frac{3}{8}\right)$ i basen $\bar{u}, \bar{v}$.

Observation: Koordinaterna beror på basen!

T.ex. är $\bar{e}_1 = 1 \cdot \bar{e}_1 + 0 \cdot \bar{e}_2 = (1,0)$ i basen $\bar{e}_1, \bar{e}_2$.

Räkneregler för vektorer (uttryckt i talpar)

i) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$

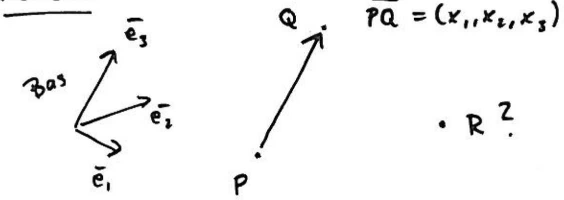
ii) $\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$, λ tal

Motsvarande räkneregler gäller för "triplar" i rummet.

(6)

3.1 Koordinatsystem

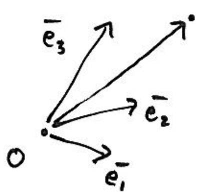
Problem:



$\overline{PQ}$ (differensen) kan beskrivas, men ej en enstaka punkt R.

Åtgärd: Vi behöver en referenspunkt.

Vi fixerar en punkt O som kallas origo (nollpunkt).



$\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ bas

O origo

P godtycklig punkt

Vi kan nu skriva $\overline{OP} = (x_1, x_2, x_3)$ i basen $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.

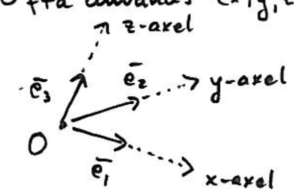
(7)

Def: $\overline{OP}$ kallas ortsvektorn för punkten P, och x_1, x_2, x_3 koordinater för P i koordinatsystemet $O\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3$. Vi skriver $P: (x_1, x_2, x_3)$ kolon

Vi identifierar helt enkelt P med dess ortsvektor.

Motsv. definition för punkter i planet.

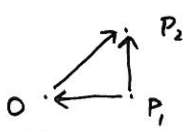
Anm: Ofta används (x, y, z) i stället för (x_1, x_2, x_3).



Ex: Ofta behöver man beräkna vektorn mellan två punkter. Om $P_1: (3,2,-1)$ och $P_2: (0,4,-7)$ punkter, så får vi

$$\overline{P_1P_2} = \overline{OP_2} - \overline{OP_1} = (0,4,-7) - (3,2,-1) = (-3,2,-6)$$

OBS! "slutpunkt − startpunkt"



Ex: Bestäm mittpunkten på sträckan $\overline{P_1P_2}$ ovan!

Mittp.formeln: $\overline{OM} = \frac{1}{2}(\overline{OP_1} + \overline{OP_2}) = \frac{1}{2}\big((3,2,-1) + (0,4,-7)\big) = (3/2, 3, -4)$ Svar: $M: (3/2, 3, -4)$.