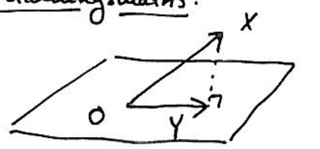
Föreläsning 11

Repetition (linjär avbildning):

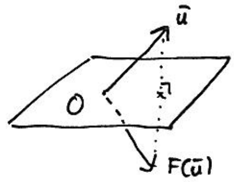
Rotationer, (ortogonal) projektion och spegling på linje/plan genom origo är exempel på linjära avbildningar. Dessa kan beskrivas med avbildningsmatris:

$$\boxed{Y = F(X) = AX}$$

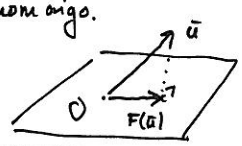


Isometriska avbildningar

Ex: • Spegling i plan genom origo.
Då är $\bar{u}$ och $F(\bar{u})$ lika långa, dvs. $|\bar{u}| = |F(\bar{u})|$



• Ortogonal projektion på plan genom origo.
I allmänhet är $|\bar{u}| \neq |F(\bar{u})|$



Def: En linjär avbildning $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kallas isometrisk om $|F(\bar{u})| = |\bar{u}|$ för alla $\bar{u}$.

Anm1: En isometrisk avbildning "bevarar avstånd":

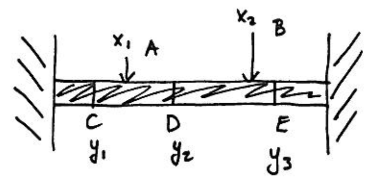
$$|F(x_1) - F(x_2)| = |F(x_1 - x_2)| = |x_1 - x_2|.$$

Anm2: Speglingar i plan genom origo är isometriska, projektioner är det inte.

Sats: F isometrisk $\Leftrightarrow$ avb.matrisen A är ortogonal

Linjära modeller:

Balk belastas.



Belastningar x_1, x_2 och utböjningar y_1, y_2, y_3.

Utböjningar beror linjärt på belastningarna:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{X}$$

Givet två mätningar:

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3
I)	1	1	5	13	6
II)	3	2	12	33	15

Bestäm A! Tre olika metoder:

Metod 1:
$$\begin{cases} a_{11} + a_{12} = 5 \\ 3a_{11} + 2a_{12} = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} = 2 \\ a_{12} = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{21} + a_{22} = 13 \\ 3a_{21} + 2a_{22} = 33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{21} = 7 \\ a_{22} = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{31} + a_{32} = 6 \\ 3a_{31} + 2a_{32} = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{31} = 3 \\ a_{32} = 3 \end{cases}$$

Detta ger $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Metod 2: A 3x2-matris som uppfyller

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 6 \end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 33 \\ 15 \end{pmatrix} \Rightarrow A\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 13 & 33 \\ 6 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 13 & 33 \\ 6 & 15 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}}_{\text{beräkna!}} = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 13 & 33 \\ 6 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Metod 3: • $F(\bar{e}_1) = F((1,0)) = F(1\cdot(3,2) - 2(1,1)) \overset{\text{linjär}}{=}$
$= F((3,2)) - 2\cdot F((1,1)) = (12,33,15) - 2\cdot(5,13,6) = (2,7,3)$

• $F(\bar{e}_2) = F((0,1)) = F(3(1,1) - (3,2)) = 3F((1,1)) - F((3,2)) =$
$= 3(5,13,6) - (12,33,15) = (3,6,3)$

kolonner

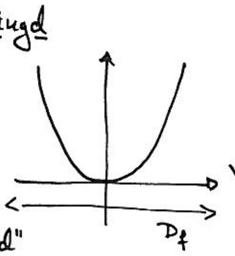
$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Mer om avbildningar:

Definitionsmängd och värdemängd

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

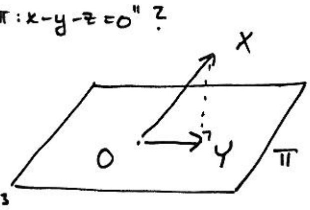
$D_f = \mathbb{R}$, $V_f = [0, \infty[$



Def.mängd = "där f är definierad"
Värdemängd = "de värden som f antar"

Ex: Vad är definitionsmängden/värdemängden för
F = "ortogonal projektion på $\pi: x - y - z = 0$"?

$$Y = F(X) = AX$$



Def.mängd: Klart att $D_F = \mathbb{R}^3$.

Värdemängd: Enligt figur, V_F = planet π.

Hur beräknar man V_F om man ej kan inse geometriskt?
– Jo, från avb.matrisen A.

Förra förel. såg vi att F ovan har avb.matrisen $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$Y = AX$. Vilka Y kan då bildas?

Ställ upp ekv. systemet och eliminera!

$$\begin{cases} y_1 = \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \\ y_2 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 \\ y_3 = \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 = \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \\ y_1 + y_2 = x_1 + x_2 \\ -y_1 + y_2 + y_3 = 0 \end{cases}$$

Systemet har lösning precis då $-y_1 + y_2 + y_3 = 0$

Planet π!

<u>Anm:</u> $Y = F(X) = AX \iff \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{pmatrix} | & | & | \\ F(\bar{e}_1) & F(\bar{e}_2) & F(\bar{e}_3) \\ | & | & | \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{X}$

$\iff (y_1, y_2, y_3) = x_1 \underbrace{(\cdot,\cdot,\cdot)}_{F(\bar{e}_1)} + x_2 \underbrace{(\cdot,\cdot,\cdot)}_{F(\bar{e}_2)} + x_3 \underbrace{(\cdot,\cdot,\cdot)}_{F(\bar{e}_3)}$

Värdemängden V_F, dvs. de Y som kan bildas, spänns upp av kolonnvektorerna $F(\bar{e}_1), F(\bar{e}_2), F(\bar{e}_3)$.

Men rang A = max antal linj. oberoende kolonner i A

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{rang } A = \text{dimension av värdemängden till } F}$

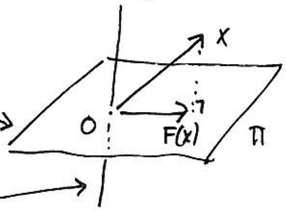
<u>Ex:</u> $F(X) = AX$, ort. projektion på $\pi: x - y - z = 0$.

Vad är rangen? Jo,

rang A = dim $V_F = 2$ (planet!)

Vad är nolldimensionen?

nolldim $A = 1$ (linjen!)



Sammansatta avbildningar

<u>Ex:</u> Betrakta avbildningarna

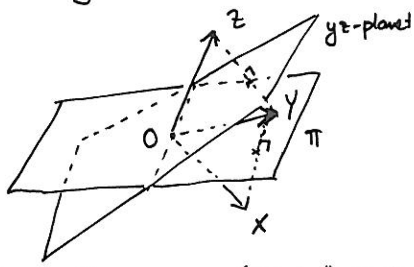
a) F = "först spegling i planet $\pi: x - y - z = 0$, och sedan i yz-planet"

b) G = "först spegling i yz-planet, och sedan i planet $\pi: x - y - z = 0$"

Är dessa avbildningar linjära?

a)

$Z = F(X)$



Vi vet att båda speglingarna var för sig är linjära, så

$Y = F_1(X) = AX$ och $Z = F_2(Y) = BY$

för några matriser A och B. Detta ger

$$Z = F_2(Y) = BY = BF_1(X) = B(AX) = (BA)X$$

Ja, avbildningen är linjär med avb.matris BA!

I vårt fall kan A beräknas till $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

och $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, vilket ger

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) På motsv. sätt: Ja, med avb. matris AB!

$$AB = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>OBS1!</u> $AB \neq BA$

<u>OBS2!</u> Notera ordningen AB

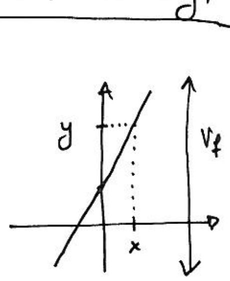
B: utförs först

A: utförs sist

$\boxed{\text{Sammansättning av två linjära avbildningar är linjär. Avb.matrisen ges av matrisprodukten (i rätt ordning)}}$

<u>Invers avbildning:</u>

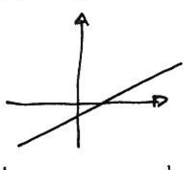
<u>Ex:</u> $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$



$V_f = \mathbb{R}$ och varje y i V_f motsvaras av <u>precis ett</u> x i D_f.

Sådana avbildningar kallas <u>bijektiva</u>. Vi kan då bilda en invers funktion:

$f^{-1}(y) = \frac{y}{2} - \frac{1}{2}$, $y \in \mathbb{R}$

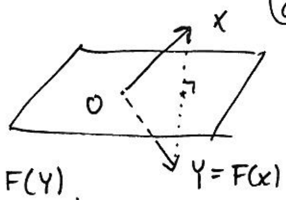


<u>Ex:</u> $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, spegling i plan genom origo.

$V_F = \mathbb{R}^3$, och varje Y motsv. av precis ett X

$\Rightarrow$ F bijektiv

I själva verket är $F^{-1}(Y) = F(Y)$.

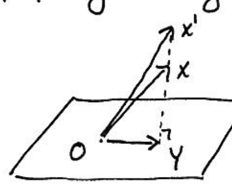


$G: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ort. projektion på plan genom origo.

V_G = planet och det finns Y som motsv. av flera X

$\Rightarrow$ G ej bijektiv

$\Rightarrow$ G^{-1} existerar ej.

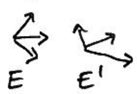


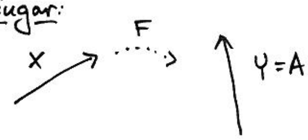
$Y = G(X) = G(X')$

$\boxed{F \text{ har avb.matris } A \iff F^{-1} \text{ har avb.matris } A^{-1}}$

<u>Basbyte och linjära avbildningar:</u>

E, E' baser





$Y = F(X) = AX$

Vid basbyte gäller $E' = S^T E \Rightarrow X = SX'$.

Antag att vi byter bas. Vi får $\begin{cases} X = SX' \\ Y = SY' \end{cases}$. Detta ger

$Y = AX \iff SY' = ASX' \iff Y' = \underline{S^{-1}AS}X'$ $\quad =: A'$

$\boxed{\text{Byter man bas ändras även avbildningsmatrisen; den nya blir } A' = S^{-1}AS}$