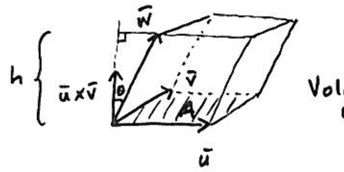
Föreläsning 12 ①

Skalär trippelprodukt (kap 5.2)



parallellepiped

$$\text{Volym} = A\cdot h = |\bar{u}\times\bar{v}||\bar{w}|\cos\theta = (\bar{u}\times\bar{v})\cdot\bar{w}$$

Skalär trippelprodukt

Tecknet beror på orienteringen av $\bar{u},\bar{v},\bar{w}$, så

$$(\bar{u}\times\bar{v})\cdot\bar{w} = \begin{cases} \text{Volymen} & \text{om } \bar{u},\bar{v},\bar{w} \text{ pos.or.} \\ -\text{Volymen} & \text{om } \bar{u},\bar{v},\bar{w} \text{ neg.or.} \end{cases}$$

- Betrakta 3x3-matris $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $\;\;$ "A_1" "A_2" "A_3"

Vi definierar determinanten av A som volymen "med tecken" av den parallellepiped som A_1, A_2, A_3 spänner upp, dvs. $\det A = (A_1\times A_2)\cdot A_3$

Alt. skrivsätt:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

②

- För 2x2-matriser $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ blir determinanten

$$\det A = \begin{cases} \text{Area} & \text{om } A_1, A_2 \text{ pos.or} \\ -\text{Area} & \text{om } A_1, A_2 \text{ neg.or} \end{cases}$$

Sats: $\det A \neq 0 \iff$ A:s kolonnvektorer är linj. oberoende

Från tidigare följer då att

Sats: $\det A \neq 0 \iff$ A inverterbar

Beräkning av determinant:

(3x3-fallet)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (A_1\times A_2)\cdot A_3 \overset{\text{OBS!}}{=} A_1\cdot(A_2\times A_3):$$

$$= (a_{11},a_{21},a_{31})\cdot\big((a_{12},a_{22},a_{32})\times(a_{13},a_{23},a_{33})\big) =$$

$$= (a_{11},a_{21},a_{31})\cdot(a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23},\ a_{32}a_{13}-a_{12}a_{33},\ a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Minnesregel:

$$\begin{array}{cccccc} + & + & + & - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}$$

③

Ex: Är vektorerna $(1,-1,2)$, $(3,3,-1)$, $(3,9,-8)$ linjärt oberoende?

Lösning:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & -8 \end{vmatrix} = -24+54+3+9-24-18 = 0$$

$$\begin{array}{cccccc} + & + & + & - & - & - \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 9 & -1 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & -8 & 2 & -1 & -8 \end{array}$$

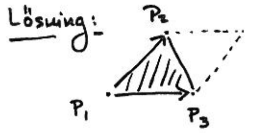
Svar: Nej! (Sats ovan)

- (2x2-fallet) Minnesregel:

$$\begin{array}{cc} + & - \end{array}\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Ex: Bestäm arean för triangeln med hörn i $P_1:(1,3)$, $P_2:(4,1)$ och $P_3:(2,2)$.

Lösning:



$$\overline{P_1P_2} = (3,-2)$$
$$\overline{P_1P_3} = (1,-1)$$

Parallellogramets area "med tecken" $= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} =$

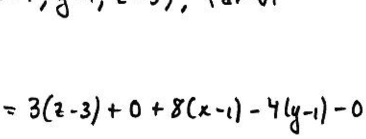
$= 3\cdot(-1) - 1\cdot(-2) = -1 \implies$ area par.gram $= 1$

$\implies$ area triangel $= 1/2$

④

Ex: Bestäm en ekvation för planet som innehåller vektorerna $\bar{u}_1 = (1,2,-1)$, $\bar{u}_2 = (0,3,4)$ och punkten $P_0:(1,1,3)$.

Lösning:



En punkt $P:(x,y,z)$ ligger i π precis då vektorerna $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ och $\overline{P_0P}$ är linjärt beroende.

Då $\overline{P_0P} = (x-1, y-1, z-3)$, får vi

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x-1 \\ 2 & 3 & y-1 \\ -1 & 4 & z-3 \end{vmatrix} = 3(z-3) + 0 + 8(x-1) - 4(y-1) - 0 + 3(x-1) =$$

$$= 11x - 4y + 3z - 16$$

Sats ovan ger att vektorerna är linj. beroende då determinanten är noll $\implies \pi: 11x - 4y + 3z - 16 = 0$

Sats 9 (Huvudsatsen)

För kvadratiska matriser A är följande villkor ekvivalenta:

(a) A:s kolonnvektorer bildar en bas

(a') A:s radvektorer bildar en bas

(b) ekv. systemet $AX=0$ har bara den triviala lösningen $X=0$

(c) ekv. systemet $AX=Y$ är lösbart för varje Y

(d) A är inverterbar (dvs. har invers A^{-1})

(e) linj. avbildning med avb. matris A är bijektiv

(f) $\det A \neq 0$

Sats 10: För kvadratiska linj. ekv. system $AX=Y$ gäller

	homogent system $AX=0$	inhomogent system $AX=Y$ $(Y\neq 0)$
$\det A = 0$	oändligt många lösn. $X=0$ är en av dem. (triviala lösningen)	ingen eller oändligt många lösningar
$\det A \neq 0$	en lösning, nämligen $X=0$	en lösning

Ex: För vilka värden på a har systemet

$$\begin{cases} ax + y + 2z = 4 \\ x + y + z = 1 \\ x + ay + 2z = 0 \end{cases} \iff AX = Y$$

oändligt många lösningar?

Lösning: Vi kollar när $\det A = 0$:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = 2a + 1 + 2a - 2 - a^2 - 2 = -a^2 + 4a - 3 = 0 \iff \text{eller} \begin{cases} a=1 \\ a=3 \end{cases}$$

Då $\det A \neq 0$, dvs. då $a \neq 1,3$, har systemet entydig lösning enligt Sats 10. Vi kollar fallen $a=1,3$:

$a=1$:

$$\begin{array}{r} \\ (-1) \\ (-1) \end{array} \begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ z = 3 \\ 0 = 4 \end{cases}$$

Systemet saknar lösning!

$a=3$:

$$\begin{array}{r} \\ (-3) \\ (-3) \end{array} \begin{cases} 3x + y + 2z = 4 \\ x + y + z = 1 \\ x + 3y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{array}{r} \\ (-4) \\ \end{array} \begin{cases} 3x + y + 2z = 4 \\ -2y - z = 1 \\ -8y - 4z = 4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x + y + 2z = 4 \\ -2y - z = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$$

oändligt många lösningar!

Svar: $a = 3$