1

Föreläsning 1

1. Linjära ekvationssystem

Linjär ekvation: $3x + 2 = 8 \iff x = 2$

Linjärt ekvationssystem:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Att lösa ekvationssystemet betyder att hitta alla x_1, x_2, x_3 som uppfyller de tre ekvationerna samtidigt.

Ex: Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 & (a) \\ \quad -5x_2 + 3x_3 = -11 & (b) \\ \quad\quad -6x_3 = 12 & (c) \end{cases}$$

Trappformat system — lätt att lösa!

Lösning: (c) $-6x_3 = 12 \iff x_3 = -2$

(b) $-5x_2 + 3\cdot(-2) = -11$

$\iff -5x_2 = -5 \iff x_2 = 1$

(a) $x_1 + 2\cdot 1 - (-2) = 6 \iff x_1 = 2$

Lösningen till systemet ges av $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -2 \end{cases}$.

2

Ex: Lös ekv.systemet

$$S1: \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 & (a) \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 & (b) \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 & (c) \end{cases}$$

Lösning: "Successiv elimination"

$$S2: \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 & (a') = (a) \\ \quad -5x_2 + 3x_3 = -11 & (b') = (b) - 2(a) \\ \quad 3x_2 - 3x_3 = 9 & (c') = (a) + (c) \end{cases}$$

$$S3: \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 & (a'') = (a') \\ \quad -5x_2 + 3x_3 = -11 & (b'') = (b') \\ \quad\quad -6x_3 = 12 & (c'') = 5(c') + 3(b') \end{cases}$$

OBS!

Systemet S3 är trappformat och har lösningen

$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -2 \end{cases}$ (se ovan!)

Kan vi nu dra slutsatsen att S1 också har lösningen $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -2 \end{cases}$?

– Ja, system S1 och S2 har samma lösningar, dvs. $S1 \iff S2$. På samma sätt gäller $S_2 \iff S_3$. Alltså $S_1 \iff S_3$. Ok!

3

Ex: Lös ekvationssystemet!

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 & (a) \\ x_1 - x_2 + 8x_3 = -1 & (b) \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 & (c) \end{cases}$$

$\iff$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 & (a') = (a) \\ \quad -2x_2 + 6x_3 = -4 & (b') = (b) - (a) \\ \quad x_2 - 3x_3 = 2 & (c') = (c) - 2(a) \end{cases}$$

$\iff$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 & (a'') = (a') \\ \quad -2x_2 + 6x_3 = -4 & (b'') = (b') \\ \quad\quad 0 = 0 & (c'') = 2(c') + (b') \end{cases}$$

Trappformat system. ?

$0 = 0$ tolkas som $0 \cdot x_3 = 0$, som uppfylls av alla värden på x_3. Vi sätter därför $x_3 = t$, där t betecknar ett godtyckligt reellt tal. Kallas parameter.

Detta ger lösningen $\begin{cases} x_1 = 1 - 5t \\ x_2 = 2 + 3t \\ x_3 = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

Oändligt många lösningar!

4

Ex: Lös ekv.systemet!

$(-3)\ (-2)$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 2 \end{cases}$$

$\iff$

(-2)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ \quad -x_2 - 4x_3 = -1 \\ \quad -2x_2 - 8x_3 = -1 \end{cases}$$

$\iff$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ \quad -x_2 - 4x_3 = -1 \\ \quad\quad 0 = 1 \end{cases}$$

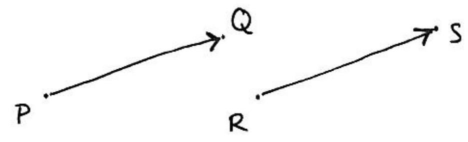
uppfylls aldrig!

System saknar lösning!

Kap 2. Geometriska vektorer

Låt P och Q vara två punkter (i planet eller rummet)

PQ riktad sträcka från P till Q.

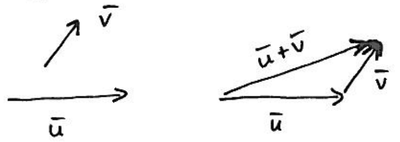


PQ och RS är två olika riktade sträckor, men har samma längd och riktning.

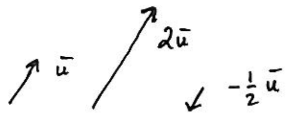
Man säger att PQ och RS representerar samma vektor, skrivs $\overline{PQ} = \overline{RS}$.

> En vektor är en riktad sträcka vars startpunkt får flyttas.

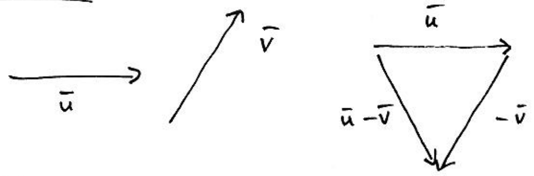
Addition:



Multiplikation med tal:



Subtraktion:



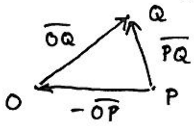
Känns förhoppningsvis igen från fysiken (krafter).

Nollvektor: A · $\overline{AA} = \bar{0}$

OBS beteckning!

Ex: Låt P och Q vara punkter. Då kan $\overline{PQ}$ beskrivas med hjälp av en tredje punkt O genom

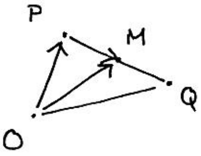
$$\boxed{\overline{PQ} = \overline{OQ} - \overline{OP}}$$



Räknelagar för vektorer: Läs s. 23-25 själva! (är naturliga)

Mittpunktsformeln: Låt P och Q vara punkter, och M vara mittpunkt på sträckan PQ. För alla punkter O gäller då

$$\boxed{\overline{OM} = \frac{1}{2}(\overline{OP} + \overline{OQ})}$$



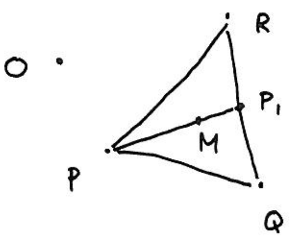
Bevis:

$$\overline{OM} = \overline{OP} + \overline{PM} = \overline{OP} + \frac{1}{2}\overline{PQ}$$

$$= \overline{OP} + \frac{1}{2}(\overline{OQ} - \overline{OP}) = \frac{1}{2}(\overline{OQ} + \overline{OP})$$

se ovan!

Tyngdpunktsformeln: Låt P, Q och R vara hörn i en triangel och låt P_1 vara mittpunkt på sträckan QR. Sträckan PP_1 sägs då vara en median. Vidare, låt M vara den punkt på medianen PP_1 som delar denna i förhållandet 2:1. För alla punkter O gäller då formeln



$$\boxed{\overline{OM} = \frac{1}{3}(\overline{OP} + \overline{OQ} + \overline{OR})}$$

Bevis: $\overline{OM} = \overline{OP} + \overline{PM} = \overline{OP} + \frac{2}{3}\overline{PP_1} =$

$$= \overline{OP} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overline{PQ} + \overline{PR}) = \overline{OP} + \frac{1}{3}\overline{PQ} + \frac{1}{3}\overline{PR} =$$

Mittpunktsformeln

$$= \overline{OP} + \frac{1}{3}(\overline{OQ} - \overline{OP}) + \frac{1}{3}(\overline{OR} - \overline{OP}) =$$

$$= \frac{1}{3}(\overline{OP} + \overline{OQ} + \overline{OR})$$

VSB!