Föreläsning 8

Matriser: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ 3x3-matris

Matriser kan adderas, mult. med tal och multipliceras med varandra.

Ex:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ -x_1 \qquad + 7x_3 = -2 \\ \quad -2x_2 - 2x_3 = 8 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Linj. ekv.system}} \longleftrightarrow \boxed{\text{Matrisekvation } AX=Y}$

Anm: För matriser gäller (i allmänhet) $AB \neq BA$

Transponat:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 4 & 6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 6 \\ -1 & 4 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -1 \\ 8 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

"spegling i diagonalen"

Def: Om $A = A^T$ sägs A vara symmetrisk.

Anm: Ett krav är att A är kvadratisk, dvs. av typ $n \times n$.

Ex: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ A symmetrisk.

Sats:
(i) $(A^T)^T = A$
(ii) $(A+B)^T = A^T + B^T$
(iii) $(AB)^T = B^T A^T$ (OBS! ordningen)

Bevis: (i),(ii) följer ur definitionen.

(iii): element på plats (j,k) i $(AB)^T =$
$=$ element på plats (k,j) i $AB =$
$=$ (rad k i A) $\cdot$ (kolonn j i B).

Samtidigt, element på plats (j,k) i $B^T A^T =$
$=$ (rad j i B^T) $\cdot$ (kolonn k i A^T) $=$
$=$ (kolonn j i B) $\cdot$ (rad k i A)

Elementen i $(AB)^T$ och $B^T A^T$ är samma! $\Rightarrow (AB)^T = B^T A^T$ ∎

Koppling linj. ekv. system $\longleftrightarrow$ matrisekvation (igen):

Ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$

(I) $AX = Y \iff \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ -x_1 \qquad + 7x_3 = -2 \\ \quad -2x_2 - 2x_3 = 8 \end{cases}$

alternativt,

(II) $AX = Y \iff x_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$

alternativt,

(III) $AX = Y \iff x_1(1,-1,0) + x_2(-1,0,-2) + x_3(2,7,-2) = (4,-2,8)$

Anm: Vektorerna $(1,-1,0)$, $(-1,0,-2)$, $(2,7,-2)$ kallas kolonnvektorer till A.

Sats (Variant av bassatsen)

För en kvadratisk matris är följande villkor ekvivalenta:

a) kolonnvektorerna bildar en bas

b) ekv.systemet $AX = 0$ har endast lösningen $X = 0$

c) ekv.systemet $AX = Y$ lösbart för alla Y

OBS! Nollmatrisen $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Ex: Hur många lösningar har ekv.systemet

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 = 0 \\ -3x_1 + 12x_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; ?$$

Homogent ekv. system (noll i högerledet), så den har minst lösningen $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Kolonnvektorerna

$(1,-3)$ och $(-4,12)$ är parallella $\Rightarrow$ ej bas för planet

Bassatsen $\Rightarrow$ systemet har fler lösningar. Svar: ∞ många.

Invers matris

Ex: Lös ekvationssystemet (matrisekvationen)

$$AX = Y \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 = y_1 \quad (-2) \\ 3x_1 + 4x_2 = y_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 = y_1 \\ x_1 \qquad = -2y_1 + y_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -2y_1 + y_2 \\ x_2 = \frac{3}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{=B}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \iff X = BY$$

Intressant koppling! $AX = Y \iff X = BY$

Matrisen B ger lösningen till ekv. systemet.

Jämförelse: Ekv. $12x = y \iff x = \frac{1}{12}y$

OBS! $\frac{1}{12} \cdot 12 = 1$

För matriser vill vi försöka hitta matris B så att

$$AX = Y \iff \underbrace{BA}_{=1?}X = BY \iff X = BY$$

Vad motsvarar en "etta" för matriser?

5

Def: Vi definierar <u>enhetsmatrisen</u> I som den kvadratiska matris som har 1:or på diagonalen och noll överallt annars, t.ex i fallet 3x3

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Egenskap: $I \cdot A = A$ och $B \cdot I = B$ för alla A, B (kolla!)

Def (invers): Vi säger att $n\times n$-matrisen A är <u>inverterbar</u> om det finns en matris A^{-1} så att $A^{-1}A = AA^{-1} = I$. A^{-1} kallas då <u>inversen</u> till A

Ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

koll: $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ok!

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ok!

Anm1: Om A inv.bar så finns <u>bara en invers</u> A^{-1}.

Anm2: Kollen ovan räcker att utföra "åt ena hållet".

Sats: A, B inv.bara $\Rightarrow$

(i) $(A^{-1})^{-1} = A$ (ii) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ (iii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Bevis: (i): ok!

(ii):
$$\begin{cases} (A^{-1})^T \cdot A^T = (A \cdot A^{-1})^T = I^T = I \\ A^T \cdot (A^{-1})^T = (A^{-1} \cdot A)^T = I^T = I \end{cases}$$

(iii):
$$\begin{cases} (B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I \\ AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I \end{cases}$$

Fråga: Kan man alltid bestämma en invers? När? Hur?

<u>Beräkning av invers</u> (har vi redan sett i tidigare exempel).

$$AX = Y \iff X = A^{-1}Y$$

om A^{-1} existerar

Ex: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Ställ upp $AX = Y \iff$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3x_1 - x_2 = y_1 \\ x_1 + 2x_2 = y_2 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = y_1 \\ 7x_1 = 2y_1 + y_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \frac{2}{7}y_1 + \frac{1}{7}y_2 \\ x_2 = -\frac{1}{7}y_1 + \frac{3}{7}y_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/7 & 1/7 \\ -1/7 & 3/7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \text{ vilket ger } A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/7 & 1/7 \\ -1/7 & 3/7 \end{pmatrix}.$$

7

lösbar för alla Y

Ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}$. $AX = Y \iff \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{cases} x_1 - 4x_2 = y_1 \\ -3x_1 + 12x_2 = y_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 - 4x_2 = y_1 \\ 0 = 3y_1 + y_2 \end{cases}$$

ej lösbar för alla y

En invers till en kvadratisk matris A existerar alltså precis då $AX = Y$ lösbar för alla Y.

Det är precis villkor c) i bassatsen!