Föreläsning 7

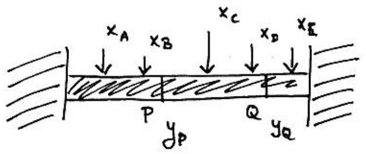
1

Kap 6 Rummet $\mathbb{R}^n$

Planet ($\mathbb{R}^2$): $\nearrow \bar{u}$ $\quad \bar{u} = (x_1, x_2)$ 2 koord.

Rummet ($\mathbb{R}^3$): $\longrightarrow \bar{u}$ $\quad \bar{u} = (x_1, x_2, x_3)$ 3 koord.

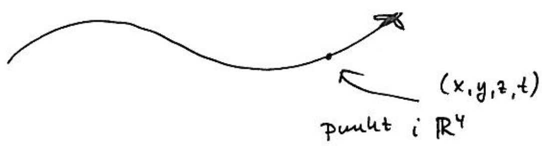
Ex:



Belastning av balk. Belastningarna $(x_A, x_B, x_C, x_D, x_E)$ ← vektor i $\mathbb{R}^5$

ger utböjningar (y_P, y_Q) ← vektor i $\mathbb{R}^2$

Ex: Flygplan rör sig



Def (Vektor i $\mathbb{R}^n$)

$\mathbb{R}^n$ = alla n-tiplar $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ där $x_1, x_2, \dots, x_n$ tal. Kallas vektor i $\mathbb{R}^n$

Summa: $(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)$

Mult. med tal: $\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$

Skalärprodukt: $(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \dots, y_n) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$

Längd: $|(x_1, x_2, \dots, x_n)| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$

Ex: $\bar{u} = (2, 1, 0, -1, 3)$, $\bar{v} = (3, 7, -4, 1, -1)$

vektorer i $\mathbb{R}^5$

$$\Rightarrow \bar{u} + \bar{v} = (2,1,0,-1,3) + (3,7,-4,1,-1) = (5,8,-4,0,2)$$

$$3\bar{u} = 3(2,1,0,-1,3) = (6,3,0,-3,9)$$

$$|\bar{u}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{15}$$

Def (Bas i $\mathbb{R}^n$): $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_p$ bas för $\mathbb{R}^n$ om varje vektor $\bar{u}$ i $\mathbb{R}^n$ entydigt kan skrivas

$$\bar{u} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_p \bar{e}_p,$$

för några tal x_i.

Ex: $\bar{e}_1 = (1,0,0,0)$, $\bar{e}_2 = (0,1,0,0)$, $\bar{e}_3 = (0,0,1,0)$, $\bar{e}_4 = (0,0,0,1)$ är bas i $\mathbb{R}^4$, ty om $\bar{u} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ vektor i $\mathbb{R}^4$ så är $\bar{u} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3 + x_4\bar{e}_4$ (entydigt!)

Kallas standardbasen i $\mathbb{R}^4$.

Anm: Linjärkombination och linjärt beroende/oberoende definieras som tidigare.

3

Sats: $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_p$ i $\mathbb{R}^n$

Ekv. $\lambda_1 \bar{u}_1 + \lambda_2 \bar{u}_2 + \dots + \lambda_p \bar{u}_p = \bar{0}$, λ_i tal.

a) $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_p$ är linjärt beroende
$\iff$
det finns någon lösning med något $\lambda_i \neq 0$

b) $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_p$ linjärt oberoende
$\iff$
det finns bara lösningen $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$

Def ("spänna upp"): $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_p$ i $\mathbb{R}^n$ spänner upp $\mathbb{R}^n$ om varje vektor $\bar{v}$ i $\mathbb{R}^n$ kan skrivas

$$\bar{v} = x_1 \bar{u}_1 + x_2 \bar{u}_2 + \dots + x_p \bar{u}_p$$

(ej nödvändigtvis entydigt) för några tal x_i.

Ex: $\bar{u}_1 = (2,0,1,3)$, $\bar{u}_2 = (0,1,1,-1)$, $\bar{u}_3 = (1,-1,0,2)$ i $\mathbb{R}^4$

a) Spänner vektorerna upp $\mathbb{R}^4$?

b) Är vektorerna linjärt oberoende?

Lösning: a) $\bar{v} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ i $\mathbb{R}^4$

4

Kolla om det finns tal x_1, x_2, x_3 så att

$$(y_1, y_2, y_3, y_4) = x_1(2,0,1,3) + x_2(0,1,1,-1) + x_3(1,-1,0,2) \quad (*)$$

$$\iff (y_1, y_2, y_3, y_4) = (2x_1 + x_3, x_2 - x_3, x_1 + x_2, 3x_1 - x_2 + 2x_3)$$

$$\iff \begin{cases} 2x_1 + x_3 = y_1 \\ x_2 - x_3 = y_2 \\ x_1 + x_2 = y_3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = y_4 \end{cases} \overset{\text{G.e}}{\iff} \begin{cases} 2x_1 + x_3 = y_1 \\ x_2 - x_3 = y_2 \\ -x_3 = y_1 + 2y_2 - 2y_3 \\ 0 = 4y_1 - 2y_3 - 2y_4 \end{cases}$$

Nej, lösbart bara om $4y_1 - 2y_3 - 2y_4 = 0$

b) Samma ekv. som (*), men (y_1, y_2, y_3, y_4) utbytt mot $(0,0,0,0)$:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ -x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$ Alltså, $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ linjärt oberoende.

Sats (Bassatsen): För $\mathbb{R}^n$ gäller

(i) Varje bas i $\mathbb{R}^n$ har n st. vektorer

5

(ii) n vektorer är bas i $\mathbb{R}^n$

$\iff$

de är linjärt oberoende

$\iff$

de spänner upp $\mathbb{R}^n$

(iii) a) fler än n vektorer i $\mathbb{R}^n$ är alltid linjärt beroende

b) färre än n vektorer i $\mathbb{R}^n$ spänner aldrig upp $\mathbb{R}^n$

Kap 7: Matriser

Ex:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 7x_1 - 3x_3 = 0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 7 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

system matris

Def: En matris A är ett rektangulärt schema av tal, ordnade i rader och kolonner, t.ex.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 5 \\ -7 & 0 & 6 & 1 \\ 12 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \leftarrow \text{rader}$$

$\uparrow$ kolonner

Matrisen A ovan är av typ 3×4 (rader $\times$ kolonner)

[En matris kan ses som en generalisering av vektorbegreppet.]

6

• Allmänt skriver vi en $m\times n$-matris

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} matriselement på rad i, kolonn j.

Ex (Matrisaddition):

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}}_{A} + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 6 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}_{B} = \begin{pmatrix} 7-1 & 1+2 \\ 0+6 & -1-3 \\ 2+0 & -3+4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 6 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A+B}$$

OBS! A och B måste vara av samma typ.

Ex (Multiplikation med tal):

$$5\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 15 & 30 & 10 \\ -5 & 0 & 20 \\ 10 & 0 & -5 \end{pmatrix}}_{5A}$$

Produkt av två matriser (mer komplicerat):

Produkten AB bildas genom att på plats (j,k) i AB (rad j, kolonn k) sätta skalärprodukten av rad j i A

7

och kolonn k i B:

Ex:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 2 + 2\cdot(-3) + 6\cdot 4 & 5\cdot 0 + 2\cdot(-1) + 6\cdot 2 \\ (-1)\cdot 2 + 0\cdot(-3) + 4\cdot 4 & (-1)\cdot 0 + 0\cdot(-1) + 4\cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 28 & 10 \\ 14 & 8 \end{pmatrix}$$

OBS! Kan endast göras då antalet kolonner i A = = antalet rader i B

Anm: A $m\times p$-matris, B $p\times n$-matris $\Rightarrow$ AB $m\times n$-matris

Ex: $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ ej definierad!

Däremot är $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ definierad.

Ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 3\cdot(-1) & 1\cdot(-6) + 3\cdot 2 \\ (-2)\cdot 3 + (-6)\cdot(-1) & (-2)(-6) + (-6)\cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Kallas nollmatrisen.

8

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 + (-6)(-2) & 3\cdot 3 + (-6)(-6) \\ (-1)\cdot 1 + 2\cdot(-2) & (-1)\cdot 3 + 2\cdot(-6) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 15 & 45 \\ -5 & -15 \end{pmatrix}$$

Anm: I allmänhet gäller ej $AB = BA$

Ex: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ är ett exempel på en radmatris, och $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ på en kolonnmatris.

Def:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

transponat

Byt plats på rader/kolonner!

Ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ och $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + x_3 \\ -x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}$$

Matrisekvationen $AX = Y$ blir då

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{matrix} \text{linj. ekv. system} \\ \Updownarrow \\ \text{matrisekv. } AX = Y \end{matrix}}$$

Läs räknelagar (Sats 1, s.12n) själv!