①

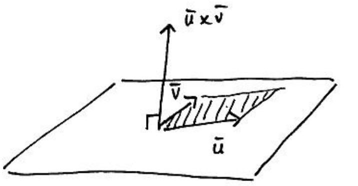
Föreläsning 6

Kap 5 Vektorprodukt

Skalärprodukt: $\bar{u}\cdot\bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$ (tal)

Vektorprodukt: $\bar{u}\times\bar{v} = $ (vektor) ?

Vektorprodukt (def. bara i rummet)



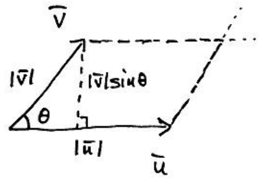
$\bar{u}\times\bar{v}$ är en vektor sådan att

1) $\bar{u}\times\bar{v}$ är ortogonal mot både $\bar{u}$ och $\bar{v}$

2) $|\bar{u}\times\bar{v}| = A(\bar{u},\bar{v}) =$ arean av parallellogramet som $\bar{u}$ och $\bar{v}$ spänner upp ($= |\bar{u}||\bar{v}|\sin\theta$)

3) $\bar{u},\bar{v},\bar{u}\times\bar{v}$ är positivt orienterade (se nedan)

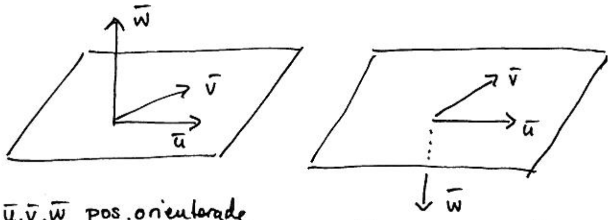
Ex:



Parallellogramarean är bas × höjd = $= |\bar{u}||\bar{v}|\sin\theta$

②

På vilket håll ska $\bar{u}\times\bar{v}$ peka? Jo, man vill att $\bar{u},\bar{v},\bar{u}\times\bar{v}$ ska vara positivt orienterade

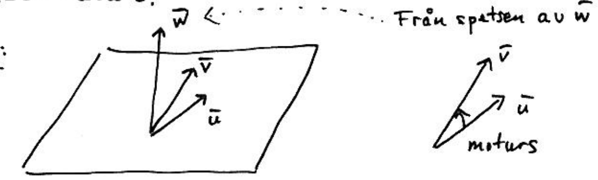


$\bar{u},\bar{v},\bar{w}$ pos. orienterade

$\bar{u},\bar{v},\bar{w}$ neg. orienterade

- $\bar{u},\bar{v},\bar{w}$ är positivt orienterade om, sett från spetsen av $\bar{w}$, den minsta vinkel som "överför" $\bar{u}$ på $\bar{v}$ sker moturs.

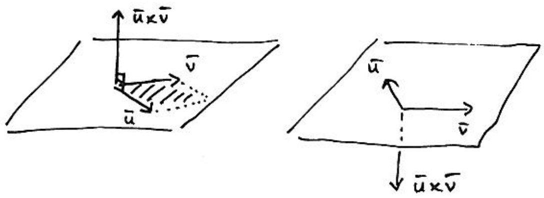
Ex:



Alltså $\bar{u},\bar{v},\bar{w}$ pos. orienterade.

OBS! Ordningen i vilka vektorerna räknas upp spelar roll, exempelvis är $\bar{v},\bar{u},\bar{w}$ neg. orienterade ovan.

Ex:

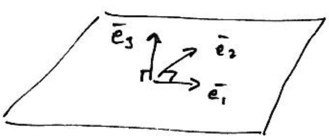


③

Anm1: $\bar{u}\times\bar{v} = -\bar{v}\times\bar{u}$

Anm2: Om $\bar{u}$ och $\bar{v}$ är parallella, så är $\bar{u}\times\bar{v} = \bar{0}$, eftersom parallellogramet "kollapsar"

Ex: Låt $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3$ vara positivt orienterad ON-bas (HON-bas)



Då gäller

$$\bar{e}_1\times\bar{e}_2 = -\bar{e}_2\times\bar{e}_1 = \bar{e}_3$$
$$\bar{e}_3\times\bar{e}_1 = -\bar{e}_1\times\bar{e}_3 = \bar{e}_2$$
$$\bar{e}_2\times\bar{e}_3 = -\bar{e}_3\times\bar{e}_2 = \bar{e}_1$$

Vidare $\bar{e}_1\times\bar{e}_1 = \bar{e}_2\times\bar{e}_2 = \bar{e}_3\times\bar{e}_3 = \bar{0}$

Läs "skalär trippelprodukt" själva! (Återkommer)

Räkneregler för vektorprodukt:

1. $\bar{u}\times\bar{v} = \bar{0} \iff \bar{u}$ och $\bar{v}$ parallella
2. $\bar{v}\times\bar{u} = -\bar{u}\times\bar{v}$
3. $(\bar{u}_1+\bar{u}_2)\times\bar{v} = \bar{u}_1\times\bar{v} + \bar{u}_2\times\bar{v}$
4. $\bar{u}\times(\bar{v}_1+\bar{v}_2) = \bar{u}\times\bar{v}_1 + \bar{u}\times\bar{v}_2$
5. $(\lambda\bar{u})\times\bar{v} = \bar{u}\times(\lambda\bar{v}) = \lambda(\bar{u}\times\bar{v})$

Bevis: Läs själva!

④

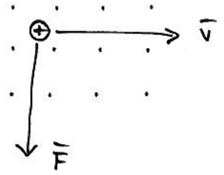
Ex: För skalärprodukter gäller "konjugatregeln"

$$(\bar{u}+\bar{v})\cdot(\bar{u}-\bar{v}) = \bar{u}\cdot\bar{u} \underbrace{-\bar{u}\cdot\bar{v}+\bar{v}\cdot\bar{u}}_{=0} - \bar{v}\cdot\bar{v} =$$
$$= |\bar{u}|^2 - |\bar{v}|^2$$

Detta gäller ej för vektorprodukter

$$(\bar{u}+\bar{v})\times(\bar{u}-\bar{v}) = \underbrace{\bar{u}\times\bar{u}}_{\bar{0}} - \bar{u}\times\bar{v} + \bar{v}\times\bar{u} - \underbrace{\bar{v}\times\bar{v}}_{\bar{0}}$$
$$= -\bar{u}\times\bar{v} - \bar{u}\times\bar{v} = -2(\bar{u}\times\bar{v})$$

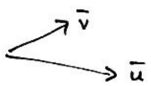
Ex (fysik):



$\bar{F} = q\bar{v}\times B$

(Ett annat exempel är vridningsmoment: $\bar{M} = \bar{r}\times\bar{F}$.)

Ex: $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3$ HON-bas



$$\bar{u} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3$$
$$\bar{v} = y_1\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2 + y_3\bar{e}_3$$

$$\Rightarrow \bar{u}\times\bar{v} = (x_1\bar{e}_1+x_2\bar{e}_2+x_3\bar{e}_3)\times(y_1\bar{e}_1+y_2\bar{e}_2+y_3\bar{e}_3)$$
$$= x_1y_1\overset{\bar{0}}{\bar{e}_1\times\bar{e}_1} + x_1y_2\overset{\bar{e}_3}{\bar{e}_1\times\bar{e}_2} + x_1y_3\overset{-\bar{e}_2}{\bar{e}_1\times\bar{e}_3} +$$
$$+ x_2y_1\underset{-}{\bar{e}_2\times\bar{e}_1} + x_2y_2\underset{-}{\bar{e}_2\times\bar{e}_2} + x_2y_3\underset{}{\bar{e}_2\times\bar{e}_3} +$$

$$+\,x_3y_1\underbrace{\bar e_3\times\bar e_1}_{=\bar e_2}+x_3y_2\underbrace{\bar e_3\times\bar e_2}_{=-\bar e_1}+x_3y_3\underbrace{\bar e_3\times\bar e_3}_{=\bar 0}$$ (5)

$$=(x_2y_3-x_3y_2)\bar e_1+(x_3y_1-x_1y_3)\bar e_2+(x_1y_2-x_2y_1)\bar e_3$$

$$\boxed{(x_1,x_2,x_3)\times(y_1,y_2,y_3)=(x_2y_3-x_3y_2,\ x_3y_1-x_1y_3,\ x_1y_2-x_2y_1)}$$

Minnesregel:

$$\begin{array}{cccccc} \cancel{x_1} & x_2 & x_3 & x_1 & x_2 & \cancel{x_3}\\ & \times & \times & \times & & \\ \cancel{y_1} & y_2 & y_3 & y_1 & y_2 & \cancel{y_3}\end{array}$$

$\searrow$ pos. tecken

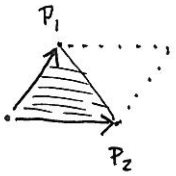
$\swarrow$ neg. tecken

Ex: $(2,3,-1)\times(4,1,-3)=(3\cdot(-3)-(-1)\cdot 1,\ (-1)\cdot 4-2\cdot(-3),\ 2\cdot 1-3\cdot 4)$

$$\begin{array}{cccccc} \cancel{2} & 3 & -1 & 2 & 3 & \cancel{-1}\\ & \times & \times & \times & & \\ \cancel{4} & 1 & -3 & 4 & 1 & \cancel{-3}\end{array} \qquad =(-8,2,-10)$$

Ex: Beräkna arean av triangeln!

$P_0:(3,0,1)$, $P_1:(5,3,0)$, $P_2:(7,1,-2)$



Triangelarean $=\frac{1}{2}$ par.gramarean

$$=\frac{1}{2}\left|\overline{P_0P_1}\times\overline{P_0P_2}\right|=(*)$$

$$\begin{cases}\overline{P_0P_1}=(5,3,0)-(3,0,1)=(2,3,-1)\\ \overline{P_0P_2}=(7,1,-2)-(3,0,1)=(4,1,-3)\end{cases}$$ (6)

$$(*)=\frac{1}{2}\left|(2,3,-1)\times(4,1,-3)\right|=\frac{1}{2}\left|(-8,2,-10)\right|=\frac{\sqrt{168}}{2}=\sqrt{42}$$

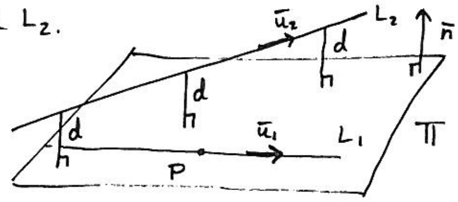
se ovan!

Avstånd linje/linje

Ex: Bestäm avståndet mellan linjerna

$$L_1:\begin{cases}x=1+3t\\ y=1+4t\\ z=1+2t\end{cases}\quad\text{och}\quad L_2:\begin{cases}x=-1+3t\\ y=10+4t\\ z=-1+t\end{cases}$$

Lösning: Planet Π innehåller L_1 och är parallell med L_2.



Planet Π: A) riktn.vektorer $\bar u_1=(3,4,2)$, $\bar u_2=(3,4,1)$

Normalvektor till Π: $\bar n=\bar u_1\times\bar u_2=(3,4,2)\times(3,4,1)=(-4,3,0)$

$$\begin{array}{cccccc} \cancel{3} & 4 & 2 & 3 & 4 & \cancel{2}\\ & \times & \times & \times & & \\ \cancel{3} & 4 & 1 & 3 & 4 & \cancel{1}\end{array} \quad\Rightarrow\ \Pi:\ -4x+3y+0\cdot z+D=0$$

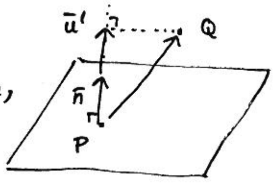
B) Punkt i planet, t.ex. $P:(1,1,1)$

$$\Rightarrow\ -4\cdot 1+3\cdot 1+0\cdot 1+D=0\ \Leftrightarrow\ D=1$$

ger $\Pi:\ -4x+3y+1=0$

(7)

Avstånd mellan L_1 och L_2 är samma som mellan godt. punkter på L_2 och Π!



Ta punkt $Q:(-1,10,-1)$ på L_2, och en punkt i planet, t.ex. $P:(1,1,1)\ \Rightarrow\ \overline{PQ}=(-2,9,-2)$.

Projektionsformeln ger $\bar u'=\left(\frac{\overline{PQ}\cdot\bar n}{|\bar n|^2}\right)\bar n=$

$$=\left(\frac{(-2,9,-2)\cdot(-4,3,0)}{\left(\sqrt{(-4)^2+3^2+0^2}\right)^2}\right)(-4,3,0)=\frac{7}{5}(-4,3,0)$$

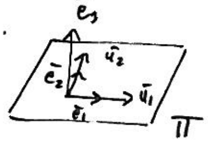
$$|\bar u'|=\frac{7}{5}\cdot\sqrt{(-4)^2+3^2+0^2}=\frac{7}{5}\cdot 5=\underline{\underline{7}}\qquad\text{Svar: }7$$

Avståndsformeln:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Ex: Bestäm HON-bas $\bar e_1,\bar e_2,\bar e_3$ så att $\bar e_1$ och $\bar e_2$ är parallella med (ligger i) planet $\Pi: x-y-z=0$.

Lösning: Ta vektor i Π, t.ex. $\bar u_1=(1,1,0)$ (prova dig fram!)



Ta ny vektor $\bar u_2$ i Π så att $\bar u_2\perp\bar u_1$. Om $\bar u_2=(x_2,y_2,z_2)$ så ska det gälla

att $$\begin{cases}x_2-y_2-z_2=0\\ (1,1,0)\cdot(x_2,y_2,z_2)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2-y_2-z_2=0\\ x_2+y_2=0\end{cases}$$ (8)

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=t\\ y_2=-t\\ z_2=2t\end{cases}$$

Sätt t.ex. $t=1$ och välj $\bar u_2=(1,-1,2)$

Normera vektorerna!

$$\begin{cases}\bar e_1=\dfrac{1}{|\bar u_1|}\bar u_1=\dfrac{1}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}}(1,1,0)=\dfrac{1}{\sqrt2}(1,1,0)\\[2ex] \bar e_2=\dfrac{1}{|\bar u_2|}\bar u_2=\dfrac{1}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}}(1,-1,2)=\dfrac{1}{\sqrt6}(1,-1,2)\end{cases}$$

Vektorn $\bar e_3=\bar e_1\times\bar e_2=\frac{1}{\sqrt2}(1,1,0)\times\frac{1}{\sqrt6}(1,-1,2)=$

$=\frac{1}{\sqrt3}(1,-1,-1)$ är nu ortogonal mot båda $\bar e_1$ och $\bar e_2$. Vidare, $|\bar e_3|=|\bar e_1\times\bar e_2|=1$ (Varför?)

Således $\bar e_1,\bar e_2,\bar e_3$ HON-bas, eftersom $\bar e_1,\bar e_2,\bar e_1\times\bar e_2$ är pos. orienterade.