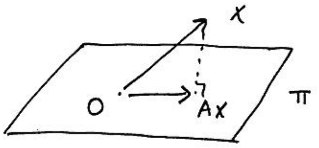
Föreläsning 14 ①

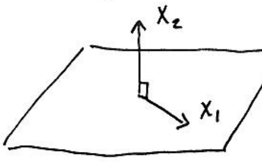
Kap. 10 Egenvärden och egenvektorer

Ex: Låt $F(X) = AX$ vara den linjära avbildningen "ortogonal projektion på planet π: $x+2y-z=0$."
Avbildningsmatrisen för denna kan beräknas till

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$



Från figuren ser vi att



I) $AX_1 = X_1$ för alla vektorer X_1 parallella med π

II) $AX_2 = 0$ för alla vektorer X_2 ortogonala mot π

Detta kan vi också kolla, t.ex.

I) vektorn $(-2,1,0)$ är parallell med π $(-2+2\cdot 1-0=0)$

och $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

II) vektorn $(1,2,-1)$ är ortogonal mot π och

$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Def: Om A kvadratisk matris och om kolonnvektorn $X \neq 0$ och talet λ uppfyller

$$AX = \lambda X$$

säger vi att X är en egenvektor och λ ett egenvärde till A.

Anm 1: En egenvektor X är alltså parallell med vektorn AX den avbildas på.

Anm 2: I exemplet ovan är vektorerna i planet egenvektorer med egenvärde 1, och vektorerna ortogonala mot planet egenvektorer med egenvärde 0.
OBS! $AX = 0\cdot X = 0$

Ex: Visa att matrisen $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ har egenvektorn $(1,2,1)$.

Lösning: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Motsv. egenvärde är 3.

Hur bestämmer man egenvektorer/egenvärden till en matris?

Egenvärden: För att λ ska vara egenvärde till A

③

måste det finnas en vektor $X \neq 0$ sådan att

$$AX = \lambda X \iff \lambda X - AX = 0 \iff (\lambda I - A)X = 0$$

Då $X \neq 0$, måste enligt kunnedsatsen

$$\boxed{\det(\lambda I - A) = 0}$$

Ex: Bestäm egenvärden för $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Lösning: $\det(\lambda I - A) = \left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right| =$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^3 + 1 + 1 - (\lambda-2) - (\lambda-2) - (\lambda-2) =$$

$$= \ldots\ldots = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda = \lambda(\lambda-3)^2 = 0$$

polynom!

$\iff \lambda = 0$ eller $\lambda = 3$ (dubbelrot)

Svar: $\lambda = 0$ och $\lambda = 3$

Def: Polynomet $P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ kallas för det karakteristiska polynomet för A, ekvationen $P_A(\lambda) = 0$ för den karakteristiska ekvationen.

④

Egenvektorer:

Ex (forts.): Vi kollar egenvärdena $\lambda = 0, 3$:

$\lambda = 0$: $AX = 0 \iff \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \overset{\text{G.e}}{\iff} \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -t \\ x_3 = t \end{cases}$

$\lambda = 3$: $AX = 3X \iff \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3x_1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3x_2 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 3x_3 \end{cases}$

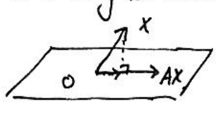
$\iff \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

Svar: Egenvektorerna till A ges av

- $t(1,-1,1)$ $(t \neq 0)$ med egenvärde 0
- alla $(x_1, x_2, x_3) \neq (0,0,0)$ som uppfyller $-x_1 + x_2 - x_3 = 0$ med egenvärde 3.

Anm 1: Vi måste få ∞ många lösningar. Varför?

Anm 2: Geometrisk tolkning av avbildningen $F(X) = AX$ är



Diagonalisering (5)

Vad händer om man byter bas, och den nya basen består av egenvektoner?

Ex (forts.): Vi väljer ut tre egenvektorer till A som bildar en bas, t.ex.

$$\bar{e}_1' = (1,-1,1), \quad \bar{e}_2' = (1,1,0), \quad \bar{e}_3' = (0,1,1).$$

Antag nu att A är avbildningsmatris för en linjär avbildning F. Då gäller

$$F(\bar{e}_1') = \bar{0}, \quad F(\bar{e}_2') = 3\bar{e}_2', \quad F(\bar{e}_3') = 3\bar{e}_3', \text{ dvs.}$$

$$A' = \begin{pmatrix} | & | & | \\ F(\bar{e}_1') & F(\bar{e}_2') & F(\bar{e}_3') \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

som är avbildningsmatris för F i basen $\bar{e}_1', \bar{e}_2', \bar{e}_3'$.

En matris på denna form kallas diagonalmatris.

> **Def:** Vi säger att en linjär avbildning är diagonaliserbar om det finns en bas för vilken avbildningsmatrisen är en diagonalmatris.

Basbyte: Om vi gör ett basbyte

(6)

$$E' = S^T E \implies X = SX' \iff X' = S^{-1}X$$

ändras avb.matrisen A för en linj.avb. till

$$A' = S^{-1}AS \quad \text{i den nya basen.}$$

Därför kan vi göra följande alternativa definition av diagonaliserbar.

> **Alt. definition:** En matris A är diagonaliserbar om det finns en inverterbar matris S sådan att
>
> $$S^{-1}AS = D,$$
>
> där D är en diagonalmatris.

> **Sats:** För n×n-matriser A gäller
>
> A diagonaliserbar $\iff$ A har n st. linjärt oberoende egenvektorer

Ex (forts.): Sätt $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\implies S^{-1}AS = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = D$$

OBS! Egenvektorerna blir kolonner i S och egenvärdena hamnar i diagonalen i D (på motsvarande plats).

(7)

Anm1: Att bestämma S och D till en matris A brukar kallas att diagonalisera A!

($S^{-1}AS = D$ behöver då ej kollas)

Anm2: S och D är ej unika!

S beror på valet av bas

D ändras pga. ordningen av basen i S

OBS! Det finns matriser som ej är diagonaliserbara!

Ex: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \implies \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ 0 & \lambda-2 \end{vmatrix}$

$$= (\lambda-2)^2 = 0$$

så A har det enda egenvärdet $\lambda = 2$ (dubbelrot)

$\lambda = 2$: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2x_1 \\ 2x_2 = 2x_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 0 \end{cases}$

Vi har bara egenvektorer $t(1,0)$ $(t \neq 0)$. Det finns då ej en bas av egenvektorer $\implies$ A ej diag.bar.

> Vilka matriser är diag.bara?
> - om matrisen har n olika egenvärden (Sats 3)
> - om matrisen är symmetrisk, dvs. $A^T = A$ (Sats 4)
> - ibland även andra matriser

(8)

Ex (forts.): $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Beräkna A^{50}!

Enligt ovan är $S^{-1}AS = D \iff A = SDS^{-1}$

$$\implies A^{50} = \overset{(50\text{ st})}{SD\underbrace{S^{-1}S}_{I}D\underbrace{S^{-1}S}_{I}D\underbrace{S^{-1}S}_{I}\cdots\underbrace{S}_{I}D\underbrace{S^{-1}S}_{I}DS^{-1}} = SD^{50}S^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{50}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{(*)}{=}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^{50} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{50} \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 3^{50} & 0 \\ 0 & 3^{50} & 3^{50} \\ 0 & 0 & 3^{50} \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 3^{49}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

> *) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$
>
> $\implies \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$