Föreläsning 13:

- 2×2-determinant = area "med tecken"
- 3×3-determinant = volym "med tecken"

Sats (Räkneregler – determinant)

$$A = (A_1, A_2, A_3) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

A_1, A_2, A_3 kolonner $\quad \overset{\shortparallel}{A_1} \quad \overset{\shortparallel}{A_2} \quad \overset{\shortparallel}{A_3}$

a) $\det(A_1' + A_1'', A_2, A_3) = \det(A_1', A_2, A_3) + \det(A_1'', A_2, A_3)$

(Gäller även kolonn 2 o 3) t.ex.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 6 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

b) $\det(\lambda A_1, A_2, A_3) = \lambda \det(A_1, A_2, A_3)$

(Gäller även kolonn 2 o 3) t.ex.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \\ -9 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ -3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

c) Om två kolonner byter plats, så byter determinanten tecken, t.ex.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & 8 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

d) Två kolonner lika $\Rightarrow \det A = 0$, t.ex.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(parallellepipeden "urartar")}$$

e) Adderar vi en multipel av en kolonn till en annan ändras ej determinanten, t.ex.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 2 & 9 & 8 \\ 3 & 12 & 9 \end{vmatrix}$$

$2 \cdot \uparrow$

Anm: Motsv. räkneregler gäller för 2×2-determinanter

Ex: Om $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ och

$$\det A^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \det A$$

Gäller även 3×3-determinanter (kolla!)

$\boxed{\text{Sats: } \det A^T = \det A}$

Anm1: Denna sats gör att räknereglerna även gäller för rader

Anm2: Villkor (a') i huvudsatsen följer av detta.

Sats (Produktregeln): $\det AB = \det A \cdot \det B$

Bevis: Läs själv!

Sats: (i) A inverterbar $\Rightarrow \det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

(ii) A ortogonal $\Rightarrow \det A = \pm 1$

Bevis: (i) A inverterbar $\Rightarrow A \cdot A^{-1} = I$

Produktregeln ger $1 = \det I = \det(A \cdot A^{-1}) =$

$= \det A \cdot \det A^{-1} \Rightarrow \det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

OBS! $\det A \neq 0$ enligt huvudsatsen

(ii) A ortogonal $\Rightarrow A^T A = I$. Detta ger

$1 = \det I = \det(A^T A) = \det A^T \cdot \det A =$

$= (\det A)^2 \Rightarrow \det A = \pm 1$ $\square$

Utveckling efter rad/kolonn:

Beräkna $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$!

$$\begin{array}{cccccc} + & + & + & - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{D_{11}} - a_{12} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}_{D_{12}} + a_{13} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}_{D_{13}}$$

D_{ij} = "stryk rad i och kolonn j"

Ex: $\rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \overset{=2}{\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}} - 2 \overset{=4}{\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} + (-3) \overset{=-1}{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} = 1$

Kallas utveckling efter första raden.

- Då $\det A = \det A^T$ kan vi lika bra utveckla efter första kolonnen.
- Platsbyte av två rader/kolonner ger teckenbyte. Slutsats: Vi kan utveckla efter valfri rad/kolonn bara vi håller reda på tecknen!

Teckenbyte enligt schemat $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

Ex: Utveckling efter 2:a kolumnen:

$$\begin{vmatrix}3&2&-3\\5&1&6\\1&0&2\end{vmatrix} = -2\overset{=4}{\begin{vmatrix}5&6\\1&2\end{vmatrix}} + 1\cdot\overset{=9}{\begin{vmatrix}3&-3\\1&2\end{vmatrix}} - 0\cdot\overset{=33}{\begin{vmatrix}3&-3\\5&6\end{vmatrix}} = 1$$

Anm: Funkar även för 2x2-determinanter med teckenschema $\begin{vmatrix}+&-\\-&+\end{vmatrix}$.

Adjunkt till en matris

D_{ij} = "determinant då rad i, kolonn j strukits"

Def: Adjunkten till en 3x3-matris A ges av

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix}D_{11}&-D_{21}&D_{31}\\-D_{12}&D_{22}&-D_{32}\\D_{13}&-D_{23}&D_{33}\end{pmatrix}$$ OBS! index och tecken

(Motsv. för 2x2-determinanter)

Sats: A inverterbar ($\det A \neq 0$) $\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A$

Ex: $A = \begin{pmatrix}2&3\\1&4\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\det A = 5\\ \operatorname{adj} A = \begin{pmatrix}4&-3\\-1&2\end{pmatrix}\end{cases}$

$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4&-3\\-1&2\end{pmatrix}$

Sats (Cramers regel): $A=(A_1,A_2,A_3)$ matris i 3x3-fallet och $A=(A_1,A_2)$ i 2x2-fallet. kolonner

Om $\det A \neq 0$ så har $AX = Y$ den entydiga lösningen:

2x2-fallet

$$\begin{cases}x_1 = \frac{1}{\det A}\det(Y,A_2)\\ x_2 = \frac{1}{\det A}\det(A_1,Y)\end{cases}$$

3x3-fallet

$$\begin{cases}x_1 = \frac{1}{\det A}\det(Y,A_2,A_3)\\ x_2 = \frac{1}{\det A}\det(A_1,Y,A_3)\\ x_3 = \frac{1}{\det A}\det(A_1,A_2,Y)\end{cases}$$

Ex: Lös för varje värde på a systemet

$$\begin{cases}ax + y = 1\\ x + ay = 2\end{cases}$$

Lösning: $A = \begin{pmatrix}a&1\\1&a\end{pmatrix} \Rightarrow \det A = a^2-1 \neq 0$ då $a \neq \pm 1$

$a \neq \pm 1$: Cramers regel ger den entydiga lösningen

$$\begin{cases}x = \frac{1}{a^2-1}\begin{vmatrix}1&1\\2&a\end{vmatrix} = \frac{a-2}{a^2-1}\\ y = \frac{1}{a^2-1}\begin{vmatrix}a&1\\1&2\end{vmatrix} = \frac{2a-1}{a^2-1}\end{cases}$$

Fallen $a=\pm 1$ kollas separat.

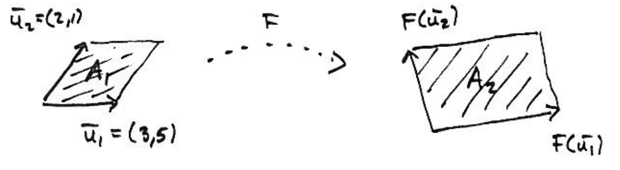
$a=1$: $\begin{cases}x+y=1\\x+y=2\end{cases}$ lösning saknas!

$a=-1$: $\begin{cases}-x+y=1\\x-y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-x+y=1\\0=3\end{cases}$ lösning saknas!

Determinanter och linjära avbildningar:

Låt F vara en linjär avbildning, $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, med avbildningsmatris A. Vid en sådan avbildning ändras areor ($\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$) och volymer ($\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$) med en faktor $|\det A|$.

Ex: F linjär avbildning, $F(X) = \begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}X$



$A_1 = \left|\begin{vmatrix}3&2\\5&1\end{vmatrix}\right| = |-7| = 7$, $A_2 = \left|\begin{vmatrix}2&1\\-1&2\end{vmatrix}\right|\cdot 7 = |5|\cdot 7 = 35$

Läs exempel 15, s. 217 själva!

Större determinanter än 3x3:

Vi definierar determinanten som det tal vi får då vi utvecklar efter rad/kolonn.

- OBS! Alla resultat för 2x2- och 3x3-determinanter, inklusive huvudsatsen, gäller även för större determinanter
- OBS! Ingen teori för större determinanter än 3x3 ingår i kursen.

Ex: Är $(2,1,3,-1),(1,3,2,1),(0,4,-1,2),(1,1,2,0)$ linjärt oberoende?

Lösning:

$$\begin{vmatrix}2&1&0&1\\1&3&4&1\\3&2&-1&2\\-1&1&2&0\end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix}3&4&1\\2&-1&2\\1&2&0\end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix}1&4&1\\3&-1&2\\-1&2&0\end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix}1&3&1\\3&2&2\\-1&1&0\end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix}1&3&4\\3&2&-1\\-1&1&2\end{vmatrix} = \ldots\ldots = -1 \neq 0$$

Svar: Ja, då determinanten $\neq 0$.

Schema: $\begin{vmatrix}+&-&+&-\\-&+&-&+\\+&-&+&-\\-&+&-&+\end{vmatrix}$