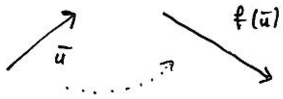
Föreläsning 10 ①

Kap 8. Linjära avbildningar

Funktion/avbildning:

Ex: $f(x)=x^2+2$, $g(x)=\sin x$ är exempel på funktioner från $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

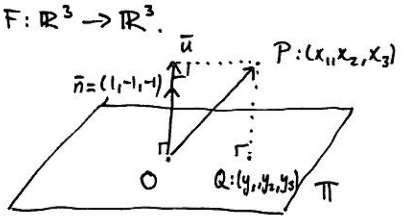
Ex: En funktion f från $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ avbildar vektorer i rummet på vektorer i rummet:



Ex: Försök att beskriva den ortogonala projektionen av en punkt i rummet på planet $\Pi: x-y-z=0$ som en avbildning $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$.

Projektionsformeln:

$$\bar{u}=\left(\frac{\overline{OP}\cdot\bar{n}}{|\bar{n}|^2}\right)\bar{n}=(*)$$



②

$$(*)=\frac{x_1-x_2-x_3}{3}(1,-1,-1)=\frac{1}{3}(x_1-x_2-x_3,-x_1+x_2+x_3,-x_1+x_2+x_3)$$

$$\Rightarrow (y_1,y_2,y_3)=\overline{OQ}=\overline{OP}-\bar{u}=(x_1,x_2,x_3)-\frac{1}{3}(x_1-x_2-x_3,-x_1+x_2+x_3,-x_1+x_2+x_3)$$

$$=\left(\tfrac{2}{3}x_1+\tfrac{1}{3}x_2+\tfrac{1}{3}x_3,\ \tfrac{1}{3}x_1+\tfrac{2}{3}x_2-\tfrac{1}{3}x_3,\ \tfrac{1}{3}x_1-\tfrac{1}{3}x_2+\tfrac{2}{3}x_3\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1=\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3\\ y_2=\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2-\frac{1}{3}x_3\\ y_3=\frac{1}{3}x_1-\frac{1}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3\end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}}_{Y}=\underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}}_{X}$$

Projektionen blir en funktion/avbildning $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ som ges av

$$\boxed{Y=F(X)=AX}$$

Matrisen A kallas avbildningsmatrisen för F.

Ex: Vad är ort. proj. av punkten (1,1,2) på $\Pi: x-y-z=0$?

Lösning:

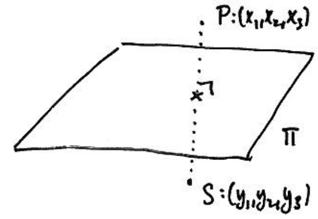
$$F\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5\\1\\4\end{pmatrix}$$

Svar: $Q:\frac{1}{3}(5,1,4)$

Ex (spegling i $\Pi: x-y-z=0$):

Vi får på motsvarande sätt

$$(y_1,y_2,y_3)=\overline{OS}=\overline{OP}-2\bar{u}=(*)$$



③

$$(*)=(x_1,x_2,x_3)-\frac{2}{3}(x_1-x_2-x_3,-x_1+x_2+x_3,-x_1+x_2+x_3)=$$

$$=\left(\tfrac{1}{3}x_1+\tfrac{2}{3}x_2+\tfrac{2}{3}x_3,\ \tfrac{2}{3}x_1+\tfrac{1}{3}x_2-\tfrac{2}{3}x_3,\ \tfrac{2}{3}x_1-\tfrac{2}{3}x_2+\tfrac{1}{3}x_2\right)$$

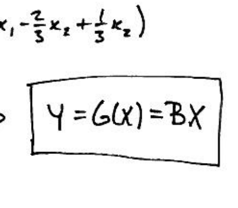
$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}}_{Y}=\underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}}_{B}\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}}_{X} \Leftrightarrow \boxed{Y=G(X)=BX}$$

Ex: Ortogonal projektion igen; denna gång på planet

$$\Pi: x-y-z-1=0 \quad \text{OBS!}$$

Detta ger (med motsv. räkningar som tidigare)

$$\begin{cases} y_1=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3\\ y_2=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2-\frac{1}{3}x_3\\ y_3=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}x_1-\frac{1}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3\end{cases}$$



OBS! Ej matrissamband $Y=AX$! Har med att origo ej ligger i planet att göra.

Def: En avbildning $F:A\to B$ kallas linjär om

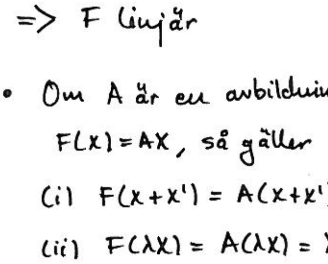
(i) $F(x+x')=F(x)+F(x')$ för alla x,x' i A,

(ii) $F(\lambda x)=\lambda F(x)$ för alla x i A och tal λ.

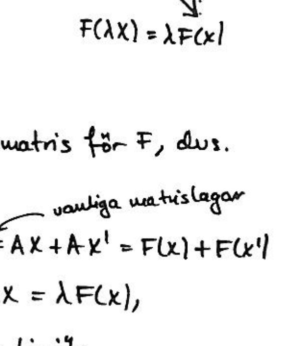
Ex: Låt F vara spegling av punkten i en linje L (i $\mathbb{R}^2$) genom origo.

④

(i)



(ii)



$\Rightarrow$ F linjär

- Om A är en avbildningsmatris för F, dvs. $F(X)=AX$, så gäller

  (i) $F(X+X')=A(X+X')\overset{\text{vanliga matrislagar}}{=}AX+AX'=F(X)+F(X')$

  (ii) $F(\lambda X)=A(\lambda X)=\lambda AX=\lambda F(X)$,

  dvs. det följer att F är linjär.

Ex: Ort. projektion och spegling på planet $\Pi: x-y-z=0$ är båda linjära avbildningar.

Även omvändningen gäller!

Sats (i) F linjär $\Leftrightarrow$ $F(X)=AX$ för någon matris A

(ii) Om F är linjär, så har avbildningsmatrisen A följande utseende:

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ F(\bar{e}_1) & F(\bar{e}_2) & \cdots & F(\bar{e}_n) \\ | & | & & | \end{pmatrix},$$

dvs. kolonnvektorerna i A är <u>bilderna</u> av basvektorerna.

<u>Bevis</u>: (i): $\Leftarrow$ visades ovan, så vi visar $\Rightarrow$ i fallet $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

vektor

F linjär $\Rightarrow (y_1, y_2, y_3) = F(X) = F(x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3) =$

$= x_1F(\bar{e}_1) + x_2F(\bar{e}_2) + x_3F(\bar{e}_3) = x_1\underbrace{(\cdot,\cdot,\cdot)}_{F(\bar{e}_1)} + x_2\underbrace{(\cdot,\cdot,\cdot)}_{F(\bar{e}_2)} + x_3\underbrace{(\cdot,\cdot,\cdot)}_{F(\bar{e}_3)}$

linjär egenskap i), ii)

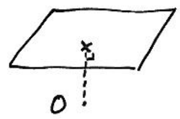
$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{pmatrix} | & | & | \\ F(\bar{e}_1) & F(\bar{e}_2) & F(\bar{e}_3) \\ | & | & | \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{X} \Leftrightarrow F(X) = AX$$

Vi har nu även visat (ii). $\square$

<u>Anm</u>: Ortogonal projektion på planet $\pi: x-y-z-1=0$ (som ej innehåller origo) är ej en linjär avbildning.

Notera att $F(\bar{0}) \neq \bar{0}$, men om F vore linjär skulle

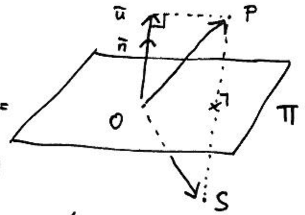
$F(\bar{0}) = F(0 \cdot X) = 0 \cdot F(X) = \bar{0}$



<u>Ex</u>: Bestäm avbildningsmatrisen B för spegling i planet $\pi: x-y-z=0$ (igen!)

Denna gång på ett nytt sätt genom att använda satsen (del(ii)).

<u>Lsg</u>: $\bar{e}_1 = (1,0,0)$, $\bar{e}_2 = (0,1,0)$, $\bar{e}_3 = (0,0,1)$



$F(\bar{e}_1) = \bar{e}_1 - 2\left(\frac{\bar{e}_1 \cdot \bar{n}}{|\bar{n}|^2}\right)\bar{n} =$

$= (1,0,0) - 2\left(\frac{(1,0,0)\cdot(1,-1,-1)}{3}\right)(1,-1,-1) =$

$= (1,0,0) - \frac{2}{3}(1,-1,-1) = \frac{1}{3}(1,2,2)$

$F(\bar{e}_2) = \bar{e}_2 - 2\left(\frac{\bar{e}_2 \cdot \bar{n}}{|\bar{n}|^2}\right)\bar{n} = (0,1,0) - 2\left(\frac{(0,1,0)\cdot(1,-1,-1)}{3}\right)(1,-1,-1) =$

$= (0,1,0) + \frac{2}{3}(1,-1,-1) = \frac{1}{3}(2,1,-2)$

På samma sätt får vi $F(\bar{e}_3) = \frac{1}{3}(2,-2,1)$

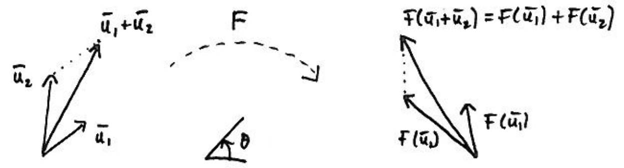
$$B = \begin{pmatrix} | & | & | \\ F(\bar{e}_1) & F(\bar{e}_2) & F(\bar{e}_3) \\ | & | & | \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Rotationer</u>:

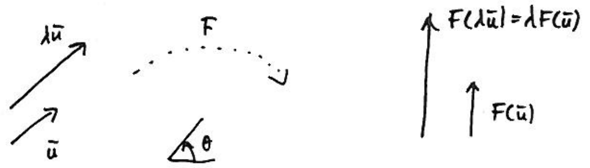
<u>Ex</u>: Betrakta avbildningen F = "rotation vinkel θ moturs (positiv riktning) i planet"

F är då linjär (kolla figurerna!)

(i)

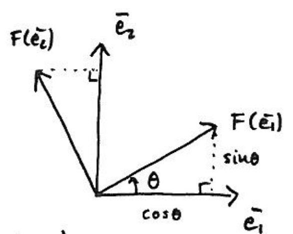


(ii)



Bestäm avbildningsmatrisen A!

$$\begin{cases} F(\bar{e}_1) = \cos\theta\,\bar{e}_1 + \sin\theta\,\bar{e}_2 \\ F(\bar{e}_2) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\bar{e}_1 + \sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\bar{e}_2 = \\ \quad = -\sin\theta\,\bar{e}_1 + \cos\theta\,\bar{e}_2 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

<u>Ex</u>: F = "rotation $\pi/3$ radianer moturs" har avb.matrisen

$$A = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$