LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
LINJÄR ALGEBRA
2004-04-14 kl 14–19

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar. Alla koordinatsystem får antas vara ortonormerade och positivt orienterade.

1. Bestäm de värden på talet a för vilka ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + az = 1+a \\ 2x + 2y + az = 2 \\ a^2x + ay = a^2 \end{cases}$$

har mer än en lösning. Lös systemet för dessa a-värden.

2. Låt $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som beskriver en spegling i linjen $x+y=0$.

a) Bestäm bilden av $(1,0)$ respektive $(0,1)$. (0.5)

b) Bestäm matrisen för avbildningen F. (0.5)

3. a) Definiera begreppet invers matris. (0.3)

b) Bestäm den 3×3-matris X som löser ekvationen

$$XAB^{-1} = I,$$

där I betecknar enhetsmatrisen och

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(0.7)

4. Låt $\pi_1 : 2x-y+2z+3=0$ och $\pi_2 : x+y+4z-3=0$ vara två plan i rummet.

a) Bestäm skärningsvinkeln mellan π_1 och π_2. (0.5)

b) Bestäm en ekvation på affin form för det plan π_3 som går genom punkten $P : (1,2,3)$ och skär både π_1 och π_2 vinkelrätt. (0.5)

5. Låt ABCD vara ett parallellogram med diagonalerna AC och DB, och låt $\mathbf{v}$ vara en vektor med koordinaterna $(2,3)$ i basen $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}$. Vilka koordinater har vektorn $\mathbf{v}$ i basen $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DB}$?

6. Bestäm det värde på a för vilket matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & a & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

har egenvektorn $\mathbf{u} = (1,-1,1)$. Bestäm sedan, för detta värde på a, en ortonormerad bas av egenvektorer till A.

LYCKA TILL!

LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
LINJÄR ALGEBRA
2006–10–20 kl 14 – 19

INGA HJÄLPMEDEL. Lösningarna skall vara försedda med ordentliga motiveringar. Alla koordinatsystem får antas vara ortonormerade och positivt orienterade om inte annat anges.

1. Bestäm en ekvation på affin form för planet genom punkterna

$$P_1 : (1,1,2), \quad P_2 : (1,-1,3), \quad P_3 : (2,3,4)$$

Bestäm skärningen mellan planet och linjen genom punkterna $P_4 : (1,2,0)$, $P_5 : (3,4,2)$. Avgör om punkten $P_6 : (1,0,1)$ ligger på linjen.

2. Lös ekvationssystemet för varje värde på konstanten a.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax - y + z = 0 \\ x - ay + z = 0 \end{cases}$$

3. Bestäm en ny positivt orienterad och ortonormerad bas $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ med följande egenskaper. Vektorn $\hat{\mathbf{e}}_1$ är parallell med skärningslinjen mellan planen $\pi_1 : x+y+z=0$ och $\pi_2 : x+2y+3z=0$, vektorn $\hat{\mathbf{e}}_2$ är ortogonal mot planet π_1.
Ange också koordinaterna, i både den gamla och den nya basen, för en normal till planet π_2.

4. Bestäm det kortaste avståndet mellan linjerna

a) $l_1 : (x,y,z) = (1,2,3) + t(1,1,1)$ och $l_2 : (x,y,z) = (1,0,1) + t(2,-1,0)$ (0.5)

b) $l_1 : (x,y,z) = (1,2,3) + t(1,1,1)$ och $l_2 : (x,y,z) = (1,0,1) + t(1,1,1)$ (0.5)

5. Låt A vara matrisen för ortogonal projektion på planet $x - 2y + 2z = 0$.

a) Bestäm rangen av matrisen A. (0.3)

b) Ange alla egenvektorer och egenvärden till A. (0.4)

c) Diagonalisera A dvs finn en inverterbar matris S och en diagonalmatris D så att $S^{-1}AS = D$. (0.3)

6. Om A är en inverterbar matris av storlek 3×3 med kolonnvektorerna $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ så kan dess invers skrivas som

$$A^{-1} = \frac{1}{\boldsymbol{a}_1 \cdot (\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3)} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3 \\ \boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2 \end{pmatrix}$$

a) Kontrollera att formeln är riktig för matrisen (0.3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Bevisa formeln allmänt. (0.7)

LYCKA TILL!

Svar till tentamen 2004-04-14

1. För $a = 0$ har systemet de oändligt många lösningarna $(x, y, z) = (1 - s, s, t)$, $s, t \in \mathbb{R}$
2. *a)* $(0, -1)$ respektive $(-1, 0)$ *b)* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
3. *a)* Se kap.7 i läroboken! *b)* $X = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -6 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
4. *a)* $\pi/4$ *b)* $\pi_3 : -2x - 2y + z + 3 = 0$
5. $(8, -5)$
6. $a = 3$ och t.ex $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 1, 2)$

Svar till tentamen 2006-10-20

1. Plan: $-6x + y + 2z + 1 = 0$, Skärningspunkt: $(0, 1, -1)$, Nej
2. $(x, y, z) = \begin{cases} (0,0,0) & \text{om } a \neq \pm 1 \\ (-t, 0, t) & \text{om } a = 1 \\ (-t, t, 0) & \text{om } a = -1 \end{cases}$
3. T.ex. $\hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$, $\hat{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, $\hat{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$.

   Normal: $(1, 2, 3)$ i den gamla och $(0, 2\sqrt{3}, \sqrt{2})$ i den nya basen.
4. *a)* $2/\sqrt{14}$ *b)* $2\sqrt{6}/3$
5. *a)* 2

   b) Alla vektorer ($\neq \bar{0}$) parallella med $(1, -2, 2)$ är egenvektorer med egenvärdet 0. Alla vektorer ($\neq \bar{0}$) ortogonala mot $(1, -2, 2)$ är egenvektorer med egenvärdet 1.

   c) T.ex. $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Frågetimmar inför skrivningarna i mars

(Tomas Carnstam, Johan Richter,...)

- fredag 4 mars 15.15–17 Lokal: MH 333
- måndag 7 mars 13.15–15 Lokal: MH 333
- tisdag 8 mars 13.15–15 Lokal: MH 333
- onsdag 9 mars 13.15–15 Lokal: MH 333
- torsdag 10 mars **10.15–12** Lokal: MH 333

"CHECKLISTA"—LINJÄR ALGEBRA FÖR V OCH Bi, Lp vt1 2010

En snabb repetition av problemlösningen kan du få genom att studera nedan angivna övningsuppgifter. Nästan alla av dessa står på övningsprogrammet eller har räknats under föreläsningar / seminarieövningar.

Avsnitt i boken	**Uppgifter i övningshäftet**
Gausselimination	1.4, 16
Med hjälp av determinanter	9.25
Vektorer (beräkningar)	2.6, 14
Linjärt (o)beroende	2.20 be; 6.2 d
Linjens ekvation (parameterform)	3.5 bd, 8
Linjens ekvation (affin form) (**endast** i $\mathbb{R}^2$)	4.18 a
Plan (parameterform)	3.10, 11
Plan (affin form)	3.14 a; 9.21 a
Skärning mellan en linje/plan och en linje/plan	3.8, 15, 18 a
Plan parallellt med två linjer	3.24
Vektorer parallella med ett plan	3.21
Skalärprodukt (beräkningar)	4.4, 9
Vinklar	4.13
Komposantuppdelning	4.22
Avstånd	4.25 a, 29 a
Ortogonala projektioner och spegelbilder	4.31, 42
Vektorprodukt (beräkningar)	5.4, 17
Areor och volym	5.7
Avstånd mellan linjer	5.9
Konstruktion av ON-bas	5.15
Matrisräkning	7.4
Invers	7.9 a, 10
Basbyte	2.23
Ortogonala matriser och basbyte	7.18, 21
Rang och nolldimension	7.23 ac; 8.24
Linjära avbildningar	8.9
Ortogonal projektion, spegling och rotation	8.2, 6, 14
Sammansättning	8.20
Värdemängd	8.23
Invers	8.25
Basbyte	8.26
Determinanter (beräkning)	9.2 a, 31 b
Area och volym	9.6
Tillämpning av huvudsatsen	9.25
Beräkning genom att utveckla efter rad/kolonn	9.14
Linjärt (o)beroende	9.37
Formeln för invers	9.15
Cramers regel	9.17
Beräkning av egenvärden och egenvektorer	10.1 a, 2 b, 3
Diagonalisering	10.11, 13