Föreläsning 6

1

Kedjeregeln

I envariabelfallet gäller, för funktionen $h = f(g(x))$, att

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x),$$

eller med $t = g(x)$ att

$$\frac{dh}{dx} = \frac{df}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

Ex: $D\left(\sin(\cos x^2)\right) = \cos(\cos x^2) D(\cos x^2) =$

$= \cos(\cos x^2)(-\sin x^2) \cdot D(x^2) = -2x \cdot \sin x^2 \cdot \cos(\cos x^2)$. □

Med denna regel klarar vi också de partiella derivatorna av t.ex. $h(x,y) = f(g(x,y))$, dvs.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \Rightarrow h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

Ex: $h(x,y) = \arctan \frac{x}{y}$ $\left(f(t) = \arctan t,\ t = g(x,y) = \frac{x}{y} \right)$

$$\Rightarrow h'_x = \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{df}{dt} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y} = \dots = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$h'_y = \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{df}{dt} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = \dots = \frac{-x}{x^2+y^2}$$ □

Anm: d för envariabelderivata, ∂ för partiell derivata

Ex: Finn alla lösningar av formen $u(x,y) = f(xy)$ (t.ex. $\sin(xy)$, $\frac{1}{xy}$) till den partiella diff.ekv

2

$$x u'_x + y u'_y + u = 1, \quad x>0, y>0. \quad (*)$$

Lösning: Sätt $t = xy \Rightarrow u(x,y) = f(t)$

Kedjeregeln: $u'_x = \frac{df}{dt} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = f'(t) \cdot y$

$u'_y = \frac{df}{dt} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = f'(t) \cdot x.$

Insättning i $(*)$ ger

$$xy f'(t) + xy f'(t) + f(t) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2t f'(t) + f(t) = 1 \qquad (*')$$

Detta är en diff.ekv. i en variabel som vi kan lösa med integrerande faktor:

$$(*') \overset{t>0}{\Leftrightarrow} f'(t) + \frac{1}{2t} f(t) = \frac{1}{2t}$$

$$\left(\text{IF}: e^{\frac{1}{2}\ln|t|} \overset{t>0}{=} e^{\frac{1}{2}\ln t} = e^{\ln t^{1/2}} = t^{1/2} = \sqrt{t} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(f(t) \cdot \sqrt{t}\right)' = \frac{\sqrt{t}}{2t} = \frac{1}{2} t^{-1/2}$$

$$\Leftrightarrow f(t) \cdot \sqrt{t} = t^{1/2} + C \Leftrightarrow f(t) = 1 + \frac{C}{\sqrt{t}}$$

Återgång till xy ger

Svar: $u(x,y) = 1 + \frac{C}{\sqrt{xy}}$ (C konstant) □

Vi övergår nu till att studera fallet

$$h(x) = f(\bar{g}(x)) = f(g_1(x), g_2(x))$$

3

dvs. då

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \bar{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \Rightarrow h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Kedjeregeln blir nu, med $u = g_1(x)$ och $v = g_2(x)$, summan

$$\boxed{\frac{dh}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} \qquad (*)}$$

Studera gärna beviset själva!

Ex: $f(u,v) = u^2 - uv$

$\bar{g}(x) = (g_1(x), g_2(x)) = (\cos x, \sin x)$

ger $h(x) = f(\bar{g}(x)) = f(\cos x, \sin x) = \cos^2 x - \cos x \sin x$

Direkt derivering ger

$h'(x) = 2\cos x(-\sin x) - (-\sin x \cdot \sin x + \cos x \cdot \cos x) =$

$= -2\cos x \sin x + \sin^2 x - \cos^2 x$

Med kedjeregeln får vi, med $u = \cos x$, $v = \sin x$,

$$h'(x) = \frac{dh}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} =$$

$= (2u - v) \cdot (-\sin x) + (-u) \cdot \cos x =$

$= (2\cos x - \sin x)(-\sin x) - \cos^2 x =$

$= -2\cos x \sin x + \sin^2 x - \cos^2 x$

Samma! □

4

Anm: Ofta är man lite "slarvig" och skriver f i stället för h, dvs.

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}$$ □

Den allmänna kedjeregeln (i enklaste fallet $\mathbb{R}^2$) behandlar funktioner

$$h(x,y) = f(\bar{g}(x,y)) = f(g_1(x,y), g_2(x,y)),\ \text{dvs.}$$

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \bar{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \Rightarrow h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

Partiella versionen av $(*)$ ovan blir, med $u = g_1(x,y)$ och $v = g_2(x,y)$,

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}}$$

och motsvarande för $\frac{\partial h}{\partial y}$.

Ex: Om f är en funktion av (u,v) och

$$\begin{cases} u = 3x + y \\ v = x \end{cases},$$

så kan f ses som en funktion av (x,y) (med "slarvet" ovan; se Anm.). Vi vill nu uttrycka $\frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial f}{\partial u}$ i derivator av u och v:

Kedjeregeln ger

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot 3 + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot 0$$

Detta ger

$$\frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial f}{\partial y} = 3\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} - 3\frac{\partial f}{\partial u} = \underline{\underline{\frac{\partial f}{\partial v}}}$$

Vi har gjort variabelbytet $\begin{cases} u = 3x+y \\ v = x \end{cases}$

och fått ett enklare uttryck!

Ex: Bestäm alla funktioner $f(x,y)$ som uppfyller ekvationen

$$(*) \quad \frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial f}{\partial y} = x, \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2,$$

och villkoret $f(0,y) = e^y$, $y\in\mathbb{R}$, genom att införa nya variabler $\begin{cases} u = 3x+y \\ v = x \end{cases}$.

Enligt ovan får vi att $(*)$ blir

$$\frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial f}{\partial y} = x \iff \frac{\partial f}{\partial v} = v$$

Denna löses i "uv-världen":

$$\frac{\partial f}{\partial v} = v \iff f(u,v) = \frac{v^2}{2} + \varphi(u),$$ φ godt der.bar funktion i en variabel

Återgång till x,y ger

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \varphi(3x+y).$$

Vi kollar nu denna allmänna lösning mot villkoret $f(0,y) = e^y$:

$$f(0,y) = 0 + \varphi(3\cdot 0 + y) = \underline{\varphi(y) = e^y}$$

$$\Rightarrow \varphi(3x+y) = e^{3x+y}$$

Svar: $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + e^{3x+y}$