Föreläsning 3

Sammansättning av funktioner

Ex: Betrakta

$$f(u) = e^u \quad \text{av typen } \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$g(x,y) = x^2+y \quad \text{av typen } \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}.$$

Vi kan då bilda sammansättningen $f \circ g$:

$$(f\circ g)(x,y) = f(g(x,y)) = f(x^2+y) = e^{x^2+y}.$$

Funktionen $f\circ g$ blir av typen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \ni (x,y) \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f\circ g"'] & g(x,y) \in \mathbb{R} \arrow[r, "f"] & f(g(x,y)) \in \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Vi kan däremot inte bilda $g\circ f$:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \neq \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

Ex: Studera

$$f(u,v) = u\sin v + e^u \quad \text{av typ } \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$\bar{g}(x,y) = (xy, x^2+y^2) \quad \text{av typ } \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

Vi får

$$(f\circ \bar{g})(x,y) = f(\bar{g}(x,y)) = f(xy, x^2+y^2) = xy\sin(x^2+y^2) + e^{xy}$$

av typen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\left(\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\bar{g}"] \arrow[rr, bend right, "f\circ \bar g"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd} \right)$

Vi kan även här inte bilda $\bar{g}\circ f$!

Ex: Studera

$$\bar{f}(u) = (u^2, \sqrt{u}) \quad \text{av typ } \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$
$$g(x,y) = \cos(x+y) \quad \text{av typ } \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

Vi får

$$(\bar{f}\circ g)(x,y) = \bar{f}(g(x,y)) = \bar{f}(\cos(x+y)) = (\cos^2(x+y), \sqrt{\cos(x+y)})$$

av typ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\left(\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "\bar f\circ g"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "\bar f"] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd} \right)$

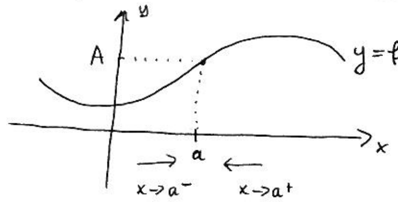
Här kan vi bilda $g\circ\bar{f}$:

$$(g\circ \bar{f})(u) = g(\bar{f}(u)) = g(u^2, \sqrt{u}) = \cos(u^2+\sqrt{u})$$

av typ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\left(\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\bar f"] \arrow[rr, bend right, "f\circ g"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd} \right)$

Gränsvärden:

I endim: Att $\lim_{x\to a} f(x) = A$ betyder att vi kan få $f(x)$ godtyckligt nära A bara x är tillräckligt nära a:



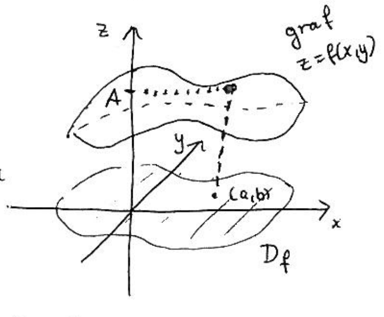
I envariabelfallet är det relativt "enkelt" att beräkna gränsvärden. Vi kan då bara närma oss punkten a från två håll: $x\to a^+$ och $x \to a^-$.

I flerdim: Vi koncentrerar oss på fallet då $f(x,y)$ är en funktion av typen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

Här betyder

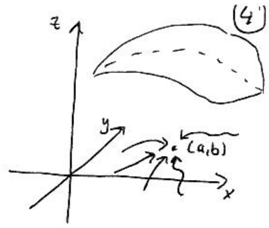
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A$$

att $f(x,y)$ kan komma godtyckligt nära A bara (x,y) är tillräckligt nära punkten (a,b).



Se exakt definition på s. 81.

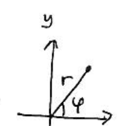
Problem! I detta fall måste vi studera oändligt många sätt att närma oss (a,b) i xy-planet. Detta problem hanterar vi genom att byta till polära koordinater:



Ex: Beräkna $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, om

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}.$$

Vi byter till polära koordinater $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$.



Att $(x,y)\to(0,0)$ är då samma sak som att $r\to 0$ (tänk efter!)

Vi får

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \frac{r\cos\varphi (r\sin\varphi)^2}{r^2} = r\cos\varphi\sin^2\varphi$$

För att vårt resultat inte ska bero av vinkeln φ, dvs. den väg vi tar in mot $(0,0)$, så uppskattar vi (absolutbeloppet av) $f(x,y)$ uppåt:

$$0 \le |f(x,y)| = r|\cos\varphi|\sin^2\varphi \le r\cdot 1\cdot 1^2 = r \to 0 \quad \text{då } r\to 0$$

Det följer nu av instängning att $|f(x,y)| \to 0$, och därmed även att $f(x,y)\to 0$ då $r\to 0$, dvs. då $(x,y)\to(0,0)$. Detta gäller oberoende av φ, vägen in mot origo, så

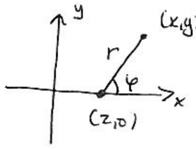
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \underline{\underline{0}}. \qquad \square$$

Hur gör man om $(x,y)\to(a,b)\neq(0,0)$?
– Vi modifierar det polära bytet.

Ex: Beräkna

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{xy-2y}{\sqrt{x^2-4x+4+y^2}}.$$

Vi byter till $\begin{cases} x = 2+r\cos\varphi \\ y = \phantom{2+{}} r\sin\varphi \end{cases}$. ↑ OBS!



Detta ger

$$f(x,y)=\frac{xy-2y}{\sqrt{x^2-4x+4+y^2}} = \frac{(x-2)y}{\sqrt{(x-2)^2+y^2}} =$$

$$= \frac{((2+r\cos\varphi)-2)r\sin\varphi}{\sqrt{((2+r\cos\varphi)-2)^2+r^2\sin^2\varphi}} = \frac{r^2\cos\varphi\sin\varphi}{\underbrace{\sqrt{r^2(\underbrace{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}_{=1})}}_{=r}} = r\cos\varphi\sin\varphi$$

Vi får $0\le|f(x,y)| = r|\cos\varphi||\sin\varphi|\le r\cdot1\cdot1 = r\to0$ då $r\to0$

Alltså gäller det att $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,0)} f(x,y)=\underline{0}$. $\square$

(6)

Hur gör man om man skall visa att

$$f(x,y)\to A \neq 0 \quad \text{då } (x,y)\to(a,b)\,?$$

– "Gissa" vad A bör bli, och försök visa att $|f(x,y)-A|\to0$.

Det kan hända att gränsvärde saknas:

Ex: Beräkna

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2xy}{x^2+y^2}\ !$$

Sätt $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi\end{cases}$. Vi får

$$f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}=\frac{2r\cos\varphi\, r\sin\varphi}{r^2}=2\cos\varphi\sin\varphi=\sin2\varphi \ (!!)$$

Här är t.ex. $f(x,y)=\sin2\varphi=\begin{cases}0 & \text{om } \varphi=0\\ 1 & \text{om } \varphi=\frac{\pi}{4}\end{cases}$, oavsett hur litet r är, dvs. hur nära origo vi är.

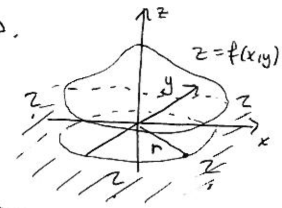
Gränsvärdet kan då ej existera! (Notera att $\varphi=0$ motsvarar vägen $y=0$, och att $\varphi=\frac{\pi}{4}$ svarar mot vägen $y=x$.)

Kolla grafen på sidan 86!

Försök även att förstå Exempel 3.26 på sid. 86.

(7)

Vi studerar nu gränsvärden då $|(x,y)|\to\infty$, dvs. då $r=\sqrt{x^2+y^2}\to\infty$.



Ex: Beräkna

$$\lim_{|(x,y)|\to\infty}(x-2y)e^{-(x^2+y^2)}\ !$$

Sätter vi $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi\end{cases}$ får vi

$$f(x,y)=(r\cos\varphi-2r\sin\varphi)e^{-r^2}, \text{ och}$$

$$0\le|f(x,y)|=|r(\cos\varphi-2\sin\varphi)e^{-r^2}| =$$

$$= re^{-r^2}\underbrace{|\cos\varphi-2\sin\varphi|}_{\overset{*)}{\le}|\cos\varphi|+|-2\sin\varphi|\le1+2=3}\le 3\,\frac{r}{e^{r^2}}\to0 \text{ då } r\to\infty$$

Det följer att $\displaystyle\lim_{|(x,y)|\to\infty} f(x,y)=\underline{\underline{0}}$.

(*) enligt triangelolikheten $|a+b|\le|a|+|b|$) $\square$

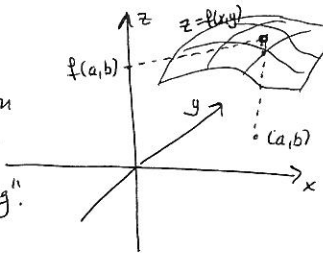
Kontinuerliga funktioner

Def: En funktion $f(x,y)$ av typ $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ sägs vara kontinuerlig i (a,b) om $f(x,y)\to f(a,b)$ då $(x,y)\to(a,b)$.

(8)

Geometrisk tolkning:

En kontinuerlig funktion har en sammanhängande graf utan plötsliga "språng".



Alla uttryck i elementära funktioner visar sig vara kontinuerliga (där de är "ofarliga", t.ex. nämnare $\neq0$).

Exempelvis är

$$f(x,y)=\frac{(x^2+y^2)\cos(xy-3)e^{xy}}{x^2+1}$$

kontinuerlig i hela $\mathbb{R}^2$.

Jämför satser om kontinuerliga funktioner, s. 91-92, med envariabelfallet. Kolla att de verkar rimliga!

Gränsvärden för funktioner av typ $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$:

Ex: $\bar f(x,y)=\left(\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2},\ \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ av typ $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

Det gäller att

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\bar f(x,y)=\left(\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2},\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=$$

$$= \underline{\underline{(0,0)}}$$

↗ övning! $\square$