Föreläsning 9 ①

Taylorutveckling:

- Envariabelfallet, Taylorutveckling vid a ges av

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \tfrac{1}{2}f''(a)h^2 + \text{Restterm}}$$

- I flervariabelfallet har vi flera partiella derivator att ta hänsyn till. För $f(x,y)$ vid punkten (a,b) får vi

$$\boxed{\begin{aligned} f(a+h,b+k) &= f(a,b) + f'_x(a,b)h + f'_y(a,b)k + \\ &+ \tfrac{1}{2}\underbrace{\left(f''_{xx}(a,b)h^2 + 2f''_{xy}(a,b)hk + f''_{yy}(a,b)k^2\right)}_{=Q(h,k)} + \text{Restterm} \end{aligned}}$$

Se Sats 5.1 (s.147) i boken. Beviset bygger på att återföra till envariabelfallet genom att studera $F(t) = f(a+th, b+tk)$.

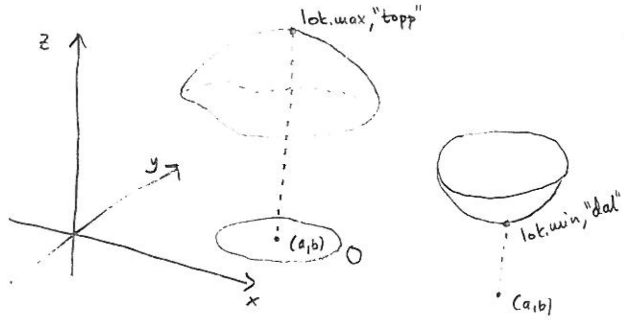
Lokal extrempunkt:

Definieras på motsvarande sätt som i envariabelfallet, t.ex. så har vi ett lokalt maximum i (a,b) om det finns en omgivning O av punkten (a,b) sådan att

$$f(x,y) \le f(a,b)$$

för alla (x,y) i O.

②



Se Definition 5.1 (s.150) för mer detaljer.

Lokal extrempunkt = lok.maxpunkt eller lok.minpunkt

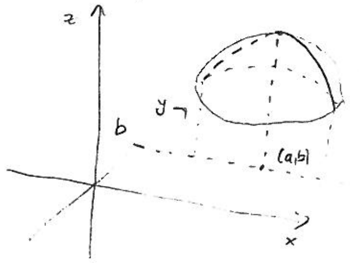
Om vi har t.ex. ett lokalt max. (en "topp") i (a,b), och vi skär funktionsytan med planet $y=b$, så har den kurva vi då får ett "vanligt envariabel lok.max" i $x=a$:

Vi inser att

$$f'_x(a,b) = 0 \;!$$

På motsvarande sätt inser vi att även

$$f'_y(a,b) = 0.$$



Sats (s.151)

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}(a,b) \text{ lok. extrempunkt} \\ (a,b) \text{ inre punkt}\end{array}\right\} \Rightarrow (\operatorname{grad} f)(a,b) = (0,0) = \bar{0}.}$$

③

Vi påminner om att

$$(\operatorname{grad} f)(a,b) = \left(f'_x(a,b), f'_y(a,b)\right).$$

Om $(\operatorname{grad} f)(a,b) = \bar{0}$ så kallas (a,b) stationär punkt.

Således: $\left.\begin{array}{l}\text{lok. extrempunkt} \\ (+\text{ inre punkt})\end{array}\right\} \Rightarrow$ stationär punkt,

men (obs!) stationär punkt $\not\Rightarrow$ lok. extrempunkt.

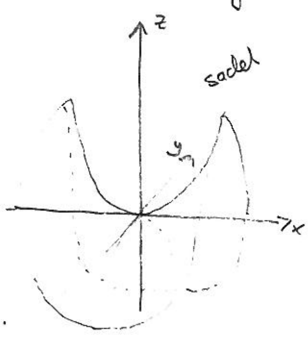
Anm: Tänk på den "sadelyta" vi har fått tidigare:

$f(x,y) = x^2 - y^2$

Vi har $\begin{cases} f'_x = 2x \\ f'_y = -2y \end{cases}$ så

$(\operatorname{grad} f)(0,0) = (0,0) = \bar{0}$,

men punkten $(0,0)$ är varken lok.max eller lok.min.



Ex: Bestäm alla stationära punkter till

$$f(x,y) = x^2(1+y)^3 + y^2.$$

Lösning:

$$\begin{cases} f'_x = 2x(1+y)^3 = 0 & ① \\ f'_y = 3x^2(1+y)^2 + 2y = 0 & ② \end{cases}$$

④

① ger $x=0$ eller $y=-1$

$x=0$ i ② ger $2y=0 \Leftrightarrow y=0$

$y=-1$ i ② ger $-2=0$ saknar lsg.

Svar: $(x,y) = (0,0)$

Anm: Vi får i allmänhet inte linjära ekv.system, men får försöka lösa dem ändå.

Vi söker nu ett tillräckligt villkor för extrempunkter. Antag att (a,b) är en stationär punkt för $f(x,y)$. Taylorutveckling i (a,b) ger då

$$\begin{aligned} f(a+h,b+k) &= f(a,b) + \overset{=0}{f'_x(a,b)}h + \overset{=0}{f'_y(a,b)}k + \\ &+ \tfrac{1}{2}Q(h,k) + \text{Restterm (liten)} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow f(a+h,b+k) - f(a,b) = \tfrac{1}{2}Q(h,k) + \text{Restterm (liten)}$$

Om vi skall ha t.ex. ett lok.max i (a,b) så måste den kvadratiska formen $Q(h,k)$ vara negativ: $f(a,b)$ ska vara större än $f(a+h,b+k)$! (Observera att vi kan försumma resttermen då (h,k) är nära $(0,0)$.)

Fyra fall:

I) $Q(h,k) > 0$ för alla $(h,k) \neq (0,0)$

Vi säger då att $Q(h,k)$ är positivt definit.

$\Rightarrow$ (a,b) (strängt) lokalt minimum

II) $Q(h,k) < 0$ för alla $(h,k) \neq (0,0)$
(negativt definit)

$\Rightarrow$ (a,b) (strängt) lokalt maximum

III) $Q(h,k)$ antar både positiva och negativa värden.
(indefinit)

$\Rightarrow$ (a,b) sadelpunkt (ej lokal extrempunkt)

IV) $Q(h,k)$ är positivt (eller negativt) semidefinit,
dvs. $Q(h,k) \geq 0$ och $Q(h,k) = 0$ för något $(h,k) \neq (0,0)$

$\Rightarrow$ ingen slutsats kan dras

Ex: Bestäm alla lok. extrempunkter till

$$f(x,y) = x^2(1+y)^3 + y^2.$$

Lösning: En lokal extrempunkt måste vara stationär, så enligt föregående exempel är $(0,0)$ enda möjligheten.
Vi beräknar $Q(h,k)$ i denna punkt:

(6)

$$\begin{cases} f''_{xx} = 2(1+y)^3 \\ f''_{xy} = 6x(1+y)^2 \\ f''_{yy} = 6x^2(1+y)+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f''_{xx}(0,0) = 2 \\ f''_{xy}(0,0) = 0 \\ f''_{yy}(0,0) = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$Q(h,k) = f''_{xx}h^2 + 2f''_{xy}hk + f''_{yy}k^2 = 2h^2 + 2k^2.$$

Vi ser att $Q(h,k)$ är positivt definit, så

Svar: $(0,0)$ är lok. min. punkt.

Om man inte direkt kan avgöra karaktären av $Q(h,k)$ så måste man kvadratkomplettera:

Ex: a) $h^2 + hk + k^2$

b) $h^2 + 2hk + k^2$

c) $-h^2 + 4hk - 3k^2$

Lösning: a) $h^2 + hk + k^2 = (h + \frac{1}{2}k)^2 - (\frac{1}{2}k)^2 + k^2 =$
$= (h + \frac{1}{2}k)^2 + \frac{3}{4}k^2$ positivt definit

b) $h^2 + 2hk + k^2 = (h+k)^2$ positivt semidefinit
ty $(h+k)^2 = 0$ för t.ex. $(h,k) = (1,-1) \neq (0,0)$.

c) $-h^2 + 4hk - 3k^2 = -(h^2 - 4hk + 3k^2) =$
$= -((h-2k)^2 - (2k)^2 + 3k^2) = -(h-2k)^2 + k^2$

(7)

Denna antar både positiva och negativa värden! indefinit.

Anm: Tecknen framför kvadraterna avgör karaktären!

Ex: Bestäm alla lokala extrempunkter till

$$f(x,y) = -2y^2 - 4xy - x^4.$$

Lösning: Bestäm först stationära punkter:

$$\begin{cases} f'_x = -4y - 4x^3 = 0 \iff y = -x^3 & (1) \\ f'_y = -4y - 4x = 0 \iff y = -x & (2) \end{cases}$$

(2) insatt i (1) ger $-x = -x^3 \iff x(x^2-1) = 0$

$\iff x = 0, 1, -1$, vilket ger de stat. punkterna

$(0,0)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$.

Vi undersöker sedan dessa stat. punkter:

$$f''_{xx} = -12x^2, \quad f''_{xy} = -4, \quad f''_{yy} = -4$$

$(0,0)$: $Q(h,k) = 0 \cdot h^2 + 2 \cdot (-4)hk + (-4)k^2 = -8hk - 4k^2 =$
$= -4(k^2 + 2hk) = -4((k+h)^2 - h^2)$ indefinit

$(1,-1)$: $Q(h,k) = -12h^2 - 8hk - 4k^2 = -4(k^2 + 2hk + 3h^2) =$
$= -4((k+h)^2 - h^2 + 3h^2) = -4(k+h)^2 - 8h^2$ neg. definit

$(-1,1)$: $Q(h,k)$ = samma som för $(1,-1)$ neg. definit

(8)

Svar: $(1,-1)$ och $(-1,1)$ är lokala max. punkter □

För funktioner $f(x,y,z)$ används samma metod. Vi får då en funktion $Q(h,k,l)$ att undersöka (se även boken):

Ex: $Q(h,k,l) = h^2 + 2k^2 + 6l^2 + 2hk + 4hl + 6kl =$
$= (h+k+2l)^2 - (k+2l)^2 + 2k^2 + 6l^2 + 6kl = \dots =$
$= (h+k+2l)^2 + k^2 + 2l^2 + 2kl = (h+k+2l)^2 + (k+l)^2 - l^2 + 2l^2 =$
$= (h+k+2l)^2 + (k+l)^2 + l^2$ positivt definit

Arbeta systematiskt!