Föreläsning 8

1

Partiella derivator av högre ordning

Envariabelanalys: En enda andraderivata

Flervariabelanalys: Många olika "partiella andraderivator" genom att derivera partiellt 2 ggr efter varandra i olika kombinationer.

Ex: $f(x,y) = x^4y^3 + \sin(x+2y)$

Bestäm alla derivator t.o.m. ordning 2.

Lösning:
$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x = 4x^3y^3 + \cos(x+2y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y = 3x^4y^2 + 2\cos(x+2y)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx} = 12x^2y^3 - \sin(x+2y)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy} = 6x^4y - 4\sin(x+2y)$$
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = f''_{xy} = 12x^3y^2 - 2\sin(x+2y) \\ \text{OBS! Tvärtom} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = f''_{yx} = 12x^3y^2 - 2\sin(x+2y) \end{array}\right\} \text{lika!}$$

Att vi får likhet är ingen slump. Detta följer av Sats 4.10 (s.124). "Derivationsföljden saknar betydelse."

2

Ex: $u(x,y) = f(r)$ där $r = \sqrt{x^2+y^2}$

(f funktion av en variabel)

Vi vill uttrycka
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$
i variabeln r och derivator av denna.

Lösning:
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = f'(r)\cdot\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}} = \underbrace{f'(r)\cdot\frac{x}{r}}_{\text{produkt}}$$

$\frac{x}{r}$: kvot av två funk. som beror av x

Vi får nu
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(f'(r)\cdot\frac{x}{r}\right) =$$
produktregel + kvotregel
$$= f''(r)\cdot\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{x}{r} + f'(r)\cdot\frac{1\cdot r - x\frac{\partial r}{\partial x}}{r^2} =$$
$$= f''(r)\cdot\frac{x}{r}\cdot\frac{x}{r} + f'(r)\cdot\frac{r - x\cdot\frac{x}{r}}{r^2} =$$
$$= f''(r)\cdot\frac{x^2}{r^2} + f'(r)\cdot\frac{r^2-x^2}{r^3}.$$

Av symmetriskäl får vi
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(r)\cdot\frac{y^2}{r^2} + f'(r)\cdot\frac{r^2-y^2}{r^3}.$$

3

Slutligen får vi
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(r)\cdot\frac{x^2+y^2}{r^2} + f'(r)\cdot\frac{r^2-x^2+r^2-y^2}{r^3} =$$
$$= f''(r)\cdot\frac{r^2}{r^2} + f'(r)\cdot\frac{2r^2-r^2}{r^3} =$$
$$= f''(r) + f'(r)\cdot\frac{1}{r}$$

Ex: Lös den partiella diff.ekv.
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4x\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + 4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad (*)$$
genom att införa de nya variablerna $\begin{cases} u = x^2+y \\ v = x \end{cases}$.

Lösning: Vi ska (förhoppningsvis) få en enklare ekvation i bara u och v.

Kedjeregeln (med de alternativa derivatabeteckn.) ger
$$f'_x = f'_u\cdot u'_x + f'_v\cdot v'_x = f'_u\cdot 2x + f'_v\cdot 1 = f'_u\cdot 2x + f'_v$$
$$f'_y = f'_u\cdot u'_y + f'_v\cdot v'_y = f'_u\cdot 1 + f'_v\cdot 0 = f'_u$$

Inför nästa derivering inför vi hjälpfunktionerna $g = f'_u$ och $h = f'_v$ $\Rightarrow \begin{cases} f'_x = g\cdot 2x + h \\ f'_y = g \end{cases}$

Vi får

4

$$f''_{xx} = (f'_x)'_x = (g\cdot 2x + h)'_x = g'_x\cdot 2x + g\cdot 2 + h'_x =$$
$$= [\text{kedjeregeln på } g'_x \text{ och } h'_x] =$$
$$= (g'_u\cdot\underbrace{u'_x}_{=2x} + g'_v\cdot\underbrace{v'_x}_{=1})\cdot 2x + 2g + (h'_u\cdot\underbrace{u'_x}_{=2x} + h'_v\cdot\underbrace{v'_x}_{=1}) =$$
$$= 4x^2g'_u + 2xg'_v + 2g + 2xh'_u + h'_v =$$
$$= [\text{återgång}] = 4x^2f''_{uu} + \underbrace{2xf''_{uv} + 2f'_u + 2xf''_{vu}}_{=} + f''_{vv} =$$
$$= 4x^2f''_{uu} + 4xf''_{uv} + f''_{vv} + 2f'_u$$

$$f''_{yy} = g'_y = g'_u\cdot u'_y + g'_v\cdot v'_y = g'_u\cdot 1 + g'_v\cdot 0 = f''_{uu}$$

"Blandade" f''_{xy} ($= f''_{yx}$) får vi lättast genom:
$$f''_{yx} = g'_x = g'_u\cdot u'_x + g'_v\cdot v'_x = g'_u\cdot 2x + g'_v\cdot 1 =$$
$$= 2xf''_{uu} + f''_{uv}$$

Ekvation (*) blir nu
$$\cancel{4x^2f''_{uu}} + \cancel{4xf''_{uv}} + f''_{vv} + \cancel{2f'_u} - 4x\left(\cancel{2xf''_{uu}} + \cancel{f''_{uv}}\right) +$$
$$+ \cancel{4x^2f''_{uu}} - \cancel{2f'_u} = 0 \iff \underline{f''_{vv} = 0}$$
(Puh!)

Lös denna i "uv"-världen:

(5)

$(f'_v)'_v = 0 \iff f'_v = \varphi_1(u) \iff f = \varphi_1(u)v + \varphi_2(u)$.

Återgång till x o y ger

Svar: $f(x,y) = x\varphi_1(x^2+y) + \varphi_2(x^2+y)$,

där φ_1 o φ_2 är godt. 2 ggr kontinuerligt deriverbara funktioner i en variabel.

Anm: Det är inte nödvändigt att använda hjälpfunktioner. Känner man sig säker så kan man "köra direkt":

$f'_x = f'_u \cdot 2x + f'_v \Rightarrow$

$$\underline{f''_{xx}} = (f'_x)'_x = (f'_u \cdot 2x + f'_v)'_x =$$
$$= (f''_{uu}\cdot u'_x + f''_{uv}\cdot v'_x)\cdot 2x + f'_u \cdot 2 +$$
$$+ (f''_{vu}\cdot u'_x + f''_{vv}\cdot v'_x) =$$
$$= (f''_{uu}\cdot 2x + f''_{uv}\cdot 1)\cdot 2x + 2f'_u$$
$$+ (f''_{vu}\cdot 2x + f''_{vv}\cdot 1) =$$
$$= \underline{4x^2 f''_{uu} + 4x f''_{uv} + f''_{vv} + 2f'_u}$$

(6)

Differentialer

Definition av differentierbarhet:

$$\underbrace{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)}_{\Delta f} = \underbrace{f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y}_{=df} + \underbrace{\rho(\Delta x,\Delta y)}_{\to 0}\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

då $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$

df kallas differentialen av f i punkten (x,y), och är en funktion av Δx o Δy.

Specialfall: $g(x,y) = x \Rightarrow dg = 1\cdot\Delta x + 0\cdot\Delta y = \Delta x$,

eller, eftersom "$g = x$", så får vi $\underline{dx = \Delta x}$.

På samma sätt $\underline{dy = \Delta y}$.

Således kan vi skriva

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy}$$

Vad kan vi använda df till?

Ovan ser vi att $\Delta f \approx df$ då $(\Delta x, \Delta y)$, dvs. (dx, dy), är nära $(0,0)$. Med andra ord,

(7)

skillnaden Δf i funktionsvärden kan approximeras av det linjära uttrycket df

lätt att beräkna!

Ex: $f(x,y) = \ln|x^2+xy|$

$$\Rightarrow df = \frac{2x+y}{x^2+xy}dx + \frac{x}{x^2+y}dy.$$

Vi vill approximera skillnaden mellan

$f(2,1)$ och $f(2.01, 1.03)$!

Sätt $(x,y) = (2,1)$ och $(\Delta x, \Delta y) = (0.01, 0.03)$.

Verklig skillnad: $\Delta f = f(2.01, 1.03) - f(2,1) =$

$= \ln|(2.01)^2 + (2.01)\cdot(1.03)| - \ln|6| \approx 0.0182$ ← miniräknare

Differentialen: $df = \frac{5}{6}\cdot 0.01 + \frac{2}{6}\cdot 0.03 =$

$= \frac{11}{6}\cdot 0.01 \approx 0.0183$. □

lättare att räkna ut!