Datorövning 2 med Maple

Under denna datorövning skall vi lösa uppgifter i övningshäftet med hjälp av Maple. Vi skall beräkna partiella derivator, transformera med kedjeregeln, rita gradientfält och titta på taylorutveckling. Det är inte viktigt att hinna med alla uppgifter. Det är viktigare att ta sig tid med att fundera över vad man ser, hur man kan förbättra det och svara på de frågor som ställs.

Förberedelser:

Läs noggrant igenom stencilen 'Introduktion till Maple' *innan* datorövningen. Läs också igenom denna handledning och gör förberedelserna till uppgift 6 och 7.

Tag med:

Denna handledning, stencilen 'Introduktion till Maple', handledningen till datorövning 1, övningshäftet och läroboken.

Partiella derivator

Maple beräknar derivator med kommandot `diff`. Vill man exempelvis derivera $\arctan \frac{y}{x}$ med avseende på x kan man *antingen* direkt skriva

```
diff(arctan(y/x),x);
```

eller starta med att definiera *funktionsuttrycket* $\arctan \frac{y}{x}$ och därefter derivera, skriv

```
f:=arctan(y/x);
diff(f,x);
```

eller först definiera en *funktion* $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$ och sen derivera

```
f:=(x,y)->arctan(y/x);
diff(f(x,y),x);
```

Observera skillnaden mellan de två senare fallen. Observera också att i dessa båda fall har `f` tilldelatsen betydelse och behåller denna tills man tilldelar `f` ett annat värde eller 'nollställer' `f` med kommandot `f:='f':`. Man kan också ta bort allt man tidigare gjort genom att skriva `restart;`. Tänk då på att detta också tar bort kommandon som `with(plots);`.

Vill man beräkna derivatans värde i en viss punkt kan man använda kommandot `eval`. Exempelvis ger kommandot `eval(%,[x=1,y=2]);`

Anmärkning: Derivationsoperatorn `D` kan också användas för partiella derivator, t. ex. ger `D[1]` derivatan av en *funktion* med avseende på första variabeln (se `?D`).

Uppgifter:

1. Använd Maple för att lösa övningarna **2.1cde**. Ibland behöver man förenkla svaren med kommandot `simplify`. Beräkna också några högre derivator. Vad är f'''_{xxx}, f'''_{xyx} och f'''_{xxy} för $f(x, y) = \arctan(y/x)$?

   Svar: ______

2. Lös övning **2.3**. Detta kan göras på en rad med hjälp av kommandot `solve` (se stencilen Introduktion till Maple). Vill man speciellt lösa ut y så ange det.

3. Det går bra att derivera även då funktionen ej är explicit given. Pröva detta på övning **2.5** Starta med att definiera Q som en funktion av (p, v), skriv

   ```
   Q:=(p,v)->g(p*v)-f(p*v)*ln(p);
   ```

   Beräkna nu derivatorna med kommandot `diff`. Vad blir Q'_p och $vQ'_v - pQ'_p$?

   Svar: ______

4. (Övning **2.15**) Beräkna här u'_x direkt med `diff(f(2*x+3*y),x)`.

   Hur ser funktioner av typ $f(2x + 3y)$ ut? Pröva med att välja $f(t) = \sin t$, dvs $f(2x + 3y) = \sin(2x + 3y)$, och rita grafen (`plot3d`), titta speciellt på nivåkurvorna (`contourplot`). Hur ser dessa ut?

   Svar: ______

   Hur ser nivåkurvor till funktioner av typ $f(xy)$. Titta på grafen till $\sin(xy)$.

   Svar: ______

Gradienten

Börja här med att skriva

```
with(plots):          with(linalg):
```

Sen kan man rita gradientfält till funktioner av två variabler med med

```
gradplot(f(x,y),x=a..b,y=c..d)
```

Genom att lägga till parametrar (*options*) kan man ändra antalet pilar (t. ex. med parametern `grid=[15,15]`), välja olika utseende på pilar (t. ex. `arrows=SLIM`) välja färg mm (se `?gradplot`). Har man laddat in `linalg` kan man beräkna gradienten med

```
grad(f(x,y),[x,y]);
```

Vill man ha gradientens värde i en viss punkt, t. ex. $(1, 2)$ kan man sen skriva

```
eval(%,[x=1,y=2]);
```

5. (Övning **2.46**) Titta på på gradientfält och nivåkurvor till funktionen $f(x, y) = xy$ i samma bild. Lagra först bildena och titta sen på de med `display`. Det är viktigt att här välja samma skala på bägge axlarna.

   Vilka samband kan man se mellan nivåkurvorna och gradienten? Om bilden inte är tillräckligt tydlig försök att ändra på antalet pilar och/eller antalet nivåkurvor.

   Svar: ______

   Titta också på en tredimensionell bild av funktionsgrafen $z = xy$ `plot3d`. Vad för slags yta är detta?

   Svar: ______

   Anmärkning: För funktioner $f(x, y, z)$ i tre variabler kan man rita tredimensionella gradientfält med `gradplot3d` och nivåytor med `implicitplot3d`. Här är det mycket svårare att se något i bilden och det räcker att rita en nivåyta. Pröva med $f(x, y, z) = xyz$ (eller ev. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$).

6. (Övning **2.37**) **Förberedelse:** Läs igenom uppgiften och ange vad som ska räknas ut.

   ____

   Starta med att definera T som en funktion av (x, y)

   ```
   T:=(x,y)->20/Pi*arctan(2*cos(x)/(exp(y)-exp(-y)));
   ```

   Lös sen uppgiften genom att beräkna gradienten med `grad`. För att sätta in de givna värdena på x och y i gradienten kan man använda `eval`.

   Vilket svar fås? Stämmer det med facit? ______________

   Titta också på gradientfält och nivåkurvor som i föregående uppgift. Titta också på en tredimensionell bild av T.Vilka samband finns mellan gradienten och nivåkurvorna. Vilket värde har funktionen på ränderna $x = \pm\pi/2$? Hur är gradienten riktad där?

   Svar: ______________

   Beräkna också $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$. Svar: ______________

7. (Övning **2.33**) **Förberedelse:** Ge en parameterframställning av

   (i.) stigens projektion på (x, y)-planet (2dim) $(x, y) =$ ______________

   (ii.) stigen på berget (3 dim) $(x, y, z) =$ ______________

   Rita en tredimensionell bild av berget med stigen inlagd (lagra först bilderna och titta på dem med `display`). Var på stigen ser det ut som att det är brantast uppåt resp nedåt? Var ser det ut att vara plant i stigens riktning? Lägg in höjdkurvor på berget. Var på stigen är man högst upp på berget?

   Rita också en tvådimensionell kartbild av berget med inlagda nivåkurvor och stigen inlagd. Vilket samband finns mellan nivåkurvorna och stigen i den punkt där det är plant i stigens riktning?

   Svar: ______________

Transformationer med kedjeregeln

8. (Övning **2.19**) Definiera funktionen h med `h:=(x,y,z)->f(x/y,y/z);`. Beräkna sen de olika partiella derivatorna. Vad blir $h'_y(x, y, z)$ och vad blir $xh'_x + yh'_y + zh'_z$?

   Svar: ______________

9. (**I mån av tid**) Lös övning **2.51** helt med Maple. Sätt först

   ```
   f:=(x,y)->g(x^2-y);
   ```

   Skriv sen in den partiella differentialekvationen.

   ```
   P:=2*diff(f(x,y),y)+diff(f(x,y),x,x)+x*diff(f(x,y),x,y)=0;
   ```

   Sätt sen $x^2 - y = t$ i differentialekvationen `P`.

   ```
   Pt:=subs(x^2-y=t,P);
   ```

   Lös differentialekvationen med `dsolve(Pt);` För att få svaret sätt $t = x^2 - y$ i lösningen `svar:=subs(t=x^2-y,%);`

   Anmärkning: Undrar man över hur funktioner $f(x, y) = g(x^2 - y)$ ser ut så kan man exempelvis välja $g(t) = \sin t$ och titta på $\sin(x^2 - y)$ med `plot3d`.

   Behandla övning **2.52** analogt med **2.51**. Den är svårare. Man kan behöva förenkla (`simplify`) mellan stegen. Man behöver tala om att $r > 0$ (med `assume(r>0):`, se `?assume`). Det är också svårare att substituera här.

Maple har färdiga rutiner för att transformera differentialekvationer och differentialoperatorer till nya variabler. Dessa får man tillgång till med kommandot `with(PDEtools)`. Nedan beskrivs hur denna metod kan användas på övning **2.59**.

10. (**I mån av tid**) För att lösa övning **2.59** starta med att skriva

```
with(PDEtools);
```

Beskriv sen variabelbytet. Man behöver ge de ursprungliga variblerna (x, y) uttryckta i de nya (u, v). I detta exempel har vi fått variblerna (u, v) uttryckta i (x, y). Pröva med att mata in det som står i problemet och låta Maple lösa ut x och y. Skriv t. ex.

```
var:={u=y,v=x*y};
uvvar:=solve(var,{x,y});
```

Skriv sen in differentialekvationen

```
PDE:=x*diff(f(x,y),x,x)-y*diff(f(x,y),x,y)+diff(f(x,y),x)=0;
```

Vill man bara transformera en derivata (t. ex. f''_{xx}) kan man skriva

```
fxx:=diff(f(x,y),x,x);
```

Sen kan man transformera till uv-varablerna med

```
uvPDE:=dchange(uvvar,PDE,simplify);
```

Observera att här används `simplify` redan i kommandot `dchange` som en parameter. Vill man bara transformera f''_{xx} skriver man `dchange(uvvar,fxx,simplify);`.

Differentialekvationen kan lösas med

```
los:=pdsolve(uvPDE);
```

Sen går vi tillbaka till x och y, och vill då bara substituera i höger led av lösningen.

```
svar:=subs(var,op(2,los));
```

Vad blir differentialekvationen transformerad till u, v och vad blir svaret?

Svar:____

Vad fås om f''_{xx} och f''_{xy} transformeras till u, v?

Svar:____

Det går bra att lösa t. ex. **2.58** eller **2.85** med denna metod.

Anmärkning 1: Man kan alternativt arbeta med differentialoperatorer, t. ex. kan opratorn $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ skrivas in som `Lxx:=f->diff(f,x,x);`.

Anmärkning 2: Vill man transformera till några välkända koordinater, t. ex. polära eller sfäriska kan detta göras med `PDEchangecoords` (se `?PDEchangecoords`). Detta kommando får man tillgång till med `with(DEtools)`. Sen kan man transformera t. ex. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ till polära koordinater med

```
PDEchangecoords(diff(f(x,y),x,x)+diff(f(x,y),y,y),
                                    [x,y],polar,[r,theta]);
```

Taylors formel

Maple beräknar taylorpolynomet av grad n till $f(x, y)$ kring punkten (a, b) med

```
mtaylor(f(x,y),[x=a,y=b],n+1);
```

11. Starta med att se hur formeln ser ut för $n = 3$. För att uttrycket skall bli lite kortare kan man substituera $x-a = h, y-b = k$ i föregående formel, `subs({x-a=h,y-b=k},%);`

    Svar:____

    Prova också med en funktion $f(x, y, z)$ av 3 variabler.

12. Om man definierar taylorpolynomet $p(x, y, n)$ av ordning n genom

    ```
    p:=(x,y,n)->mtaylor(f(x,y),[x=0,y=0],n+1);
    ```

    och sen väljer en speciell funktion t. ex. `f:=(x,y)->sin(x^2+y^2);` så får man f:s taylorpolynom kring $(0, 0)$ av grad 6 genom att skriva `p(x,y,6);`. Vad är taylorpolynomet p_6 i detta fall?

    Svar:____

    Titta på f:s graf och grafen av ett taylorpolynom p_n i samma bild. Ge graferna olika färg. Välj några olika värden på n. Man kan behöva begränsa området i z-led. Använd då `view=a..b` med lämpliga värden på a och b.

    Pröva med någon annan funktion, tag $f(x, y) = \cos x + \cos y,\ -10 \leq x \leq 10,\ -10 \leq y \leq 10$. Rita f och taylorpolynomet p_n i samma bild. Välj några olika värden på n. Hur stort behöver man välja n för att de båda graferna skall överensstämma någorlunda i hela det angivna området?

    Svar:____

13. Observera att taylorpolynomet av ordning 1 ger funktionenens tangentplan. Använd detta för att rita funktionen $f(x, y) = x^2 - y^2$ och dess tangentplan genom punkten med $x = 1/2,\ y = 1/3$ i samma bild.

Kurvor och ytor

Hur man ritar, både plana kurvor och kurvor i rummet, och ytor på parameterform diskuterades i datorövning 1.

14. Titta på hur kurvan i övning **3.1b** växer genom att skriva

    ```
    animatecurve( [1+cos(t),-2+sin(t), t=0..Pi] );
    ```

    Rita kurvan och ytan i övning **3.5** i samma bild.

    Rita ytorna i övningarna **3.6** och **3.7**. Fundera på vad parametrarna s och t betyder. Med kommandot `animate3d` (se `?animate3d`) kan man se hur ytor växer fram. Exempelvis visar

    ```
    animate3d([(2-cos(t))*cos(s*u),(2-cos(t))*sin(s*u),sin(t)],
                                       s=0..2*Pi, t=-Pi..Pi,u=0..1);
    ```

    hur ytan i **3.6** växer fram då parametern s växer.

Extrauppgift. En spännande funktion

De båda blandade andraderivatorna till funktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ej är lika i origo. Titta på graferna av funktionen och dess derivator. Titta på de båda förstaderivatorna i samma bild. För att se bättre vad som händer kring origo inskränk området till $x > 0, y > 0$.

Beräkna några derivator. Försök också med att beräkna $(f'_x)'_y(0,0)$ och $(f'_y)'_x(0,0)$ med Maple. (Här behöver man använda derivatans definition. Det kan vara bra att använda derivationsoperatorerna `D[1]` och `D[2]`.) Vilka värden får man på de båda blandade andraderivatorna i $(0,0)$?

Svar:____