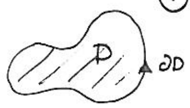
Föreläsning 21 (1)



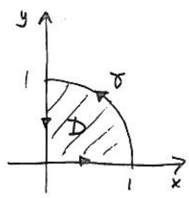
Vi påminner om Greens formel:

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Ex: Beräkna

$$I = \int_\gamma (1+xy)\,dx - x^2\,dy,$$

där γ är den positivt orienterade randen till kvartscirkelskivan D i figuren.



Lösning: I stället för att parametrisera över tre kurvbitar så verkar det enklare att använda Greens formel:

$$P = 1+xy, \quad Q = -x^2 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2x - x = -3x$$

$$D: \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \varphi \le \pi/2 \end{matrix} : E$$

Vi får

$$I = \iint_D -3x\,dx\,dy = -3\iint_E r\cos\varphi\, r\,dr\,d\varphi =$$

$$= -3\left(\int_0^1 r^2\,dr\right)\cdot\left(\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi\right) = -3\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 \cdot \left[\sin\varphi\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= -3\cdot\frac{1}{3}\cdot 1 = \underline{\underline{-1}}$$

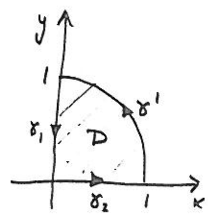
OBS! För att kunna använda Greens formel så måste vår kurva omsluta ett område, annars får vi "fixa till det": (2)

Ex: Beräkna

$$I = \int_{\gamma} (1+xy)\,dx - x^2\,dy,$$

där γ' är den positivt orienterade delen av enhetscirkeln från $(1,0)$ till $(0,1)$.

Lösning: γ' bildar ingen sluten kurva (dvs. är ej rand till ett område), men vi kan komplettera integrationsvägen med $\gamma_1 \circ \gamma_2$ enligt figur! Greens formel ger nu



$$*) \quad \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \underbrace{\int_{\gamma'} P\,dx + Q\,dy}_{\text{söker vi}} + \underbrace{\int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy + \int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy}_{\text{måste beräknas}} =$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \underline{-1}$$

enl. förra exemplet

$$\gamma_1: \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases}, \quad t: 1 \to 0 \text{ ger } \int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy = \int_1^0 \underbrace{((1+0)\cdot 0 - 0^2\cdot 1)}_{=0}\,dt = \underline{\underline{0}}$$

(3)

$$\gamma_2: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}, \quad t: 0 \to 1 \text{ ger } \int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy = \int_0^1 ((1+0)\cdot 1 - t^2\cdot 0)\,dt = \int_0^1 1\,dt = \underline{\underline{1}}$$

Omskrivning av (*) ger $\int_{\gamma'} P\,dx + Q\,dy = -1 - 0 - 1 = \underline{\underline{-2}}$. D

- Låt D vara ett område, och studera nu den speciella integralen

$$\int_{\partial D} x\,dy,$$

dvs. $\begin{cases} P = 0 \\ Q = x \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - 0 = 1.$

Greens formel ger: $\underline{\int_{\partial D} x\,dy} = \iint_D 1\,dx\,dy = \underline{\text{arean av } D}$.

På motsv. sätt: $\underline{\int_{\partial D} -y\,dx} = \underline{\text{arean av } D}$

och $\underline{\frac{1}{2}\int_{\partial D} -y\,dx + x\,dy} = \underline{\text{arean av } D}$ (kolla!).

Ex: Beräkna arean av ellipsskivan $D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$.

Lösning: Parametriseringen $\begin{cases} \frac{x}{a} = \cos\varphi \\ \frac{y}{b} = \sin\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = b\sin\varphi \end{cases} \varphi: 0 \to 2\pi$,

ger en positiv orientering av skivans rand.

(4)

Vi får $\underline{\text{arean}} = \int_{\partial D} x\,dy = \int_0^{2\pi} (a\cos\varphi \cdot b\cos\varphi)\,d\varphi =$

$$= \int_0^{2\pi} ab\cos^2\varphi\,d\varphi = ab\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi = ab\cdot\frac{1}{2}\left[\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_0^{2\pi}$$

$$= ab\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi = \underline{\underline{\pi ab}}.$$

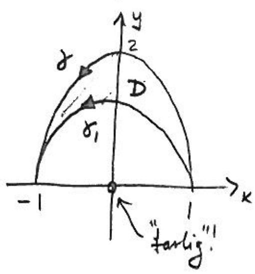
D

Ex: Beräkna

$$I = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy, \text{ där } \begin{cases} P = -\dfrac{y}{x^2+y^2} \\ Q = \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{cases}$$

och γ är övre halvan av ellipsen $4x^2 + y^2 \le 4$ från $(1,0)$ till $(-1,0)$.

Lösning: Integralen blir mycket enklare att beräkna på delen γ_1 av enhetscirkeln.



Eftersom

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{1\cdot(x^2+y^2) - 2x\cdot x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= -\frac{1\cdot(x^2+y^2) - 2y\cdot y}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

får vi

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy \overset{\text{OBS!}}{-} \int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy = \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D 0\,dx\,dy = 0,$$

dvs.

$$I = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy = \left[\begin{cases} x=\cos\varphi \\ y=\sin\varphi \end{cases},\ \varphi: 0 \to \pi\right] =$$

$$= \int_0^\pi \left(\frac{-\sin\varphi}{\underbrace{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}_{=1}}\cdot(-\sin\varphi) + \frac{\cos\varphi}{\underbrace{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}_{=1}}\cdot\cos\varphi \right) d\varphi =$$

$$= \int_0^\pi (\underbrace{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}_{=1})\,d\varphi = \underline{\underline{\pi}} \qquad \square.$$

I detta exempel var det extra lämpligt att byta väg eftersom $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

Def: Vektorfältet (P,Q) kallas ett potentialfält eller ett konservativt fält i det öppna området Ω om det finns en (2 ggr kontinuerligt deriverbar) funktion $U(x,y)$ på Ω sådan att

$$(P,Q) = \operatorname{grad} U, \quad \text{dvs. } (P,Q) = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right).$$

Funktionen U kallas då potentialfunktion till fältet.

Sats:

$$(P,Q) \text{ potentialfält} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Bevis: $(P,Q) = \operatorname{grad} U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right) \Rightarrow$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{\partial P}{\partial y}. \quad \square$$

Vårt förra exempel indikerar att en kurvintegral då är "oberoende av vägval". Det är t.o.m. så att potentialfunktionen U ger en slags "primitiv funktion".

Sats: Låt (P,Q) vara potentialfält med potentialfunktionen U i området Ω. För varje kurva γ i Ω gäller då att

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = U(x_1,y_1) - U(x_0,y_0),$$

där (x_0,y_0) är startpunkt och (x_1,y_1) slutpunkt för γ.

Anm: Speciellt är då integralen oberoende av vägvalet.

Bevis: Antag att $\gamma: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t: \alpha \to \beta.$

Eftersom $\frac{d}{dt} U(x(t),y(t)) = \frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} =$

$= P\cdot\frac{dx}{dt} + Q\cdot\frac{dy}{dt}$ får vi

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int_\alpha^\beta \left(P\cdot\frac{dx}{dt} + Q\cdot\frac{dy}{dt}\right) dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt} U(x(t),y(t))\,dt = \Big[U(x(t),y(t))\Big]_\alpha^\beta =$$

$$= U(x(\beta),y(\beta)) - U(x(\alpha),y(\alpha)) = U(x_1,y_1) - U(x_0,y_0). \quad \square$$

Ex: Beräkna

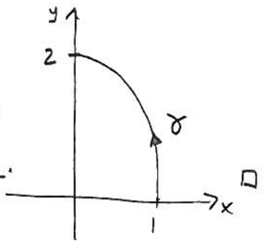
$$I = \int_\gamma \frac{x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{y}{x^2+y^2}\,dy, \text{ där}$$

γ är kurvan $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ i första kvadranten från $(1,0)$ till $(0,2)$.

Lösning: $U(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ är potential till

$(P,Q) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$ (kolla!) så länge $(x,y) \neq (0,0)$.

Vi får därför



$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = U(0,2) - U(1,0) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln 4 - \frac{1}{2}\underbrace{\ln 1}_{0} = \underline{\underline{\ln 2}}. \quad \square$$

Anm: Speciellt, om det finns en potentialfunktion så är kurvintegralen av varje sluten kurva $= 0$.

Ex: Vi återgår till exemplet på sidan 4:

$$(P,Q) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

Om γ_2 är hela enhetscirkeln i positiv led, så får vi

$$\int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy = \left[\begin{cases} x=\cos\varphi \\ y=\sin\varphi \end{cases},\ \varphi: 0 \to 2\pi\right] =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin\varphi}{\underbrace{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}_{=1}}\cdot(-\sin\varphi) + \frac{\cos\varphi}{\underbrace{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}_{=1}}\cdot\cos\varphi \right) d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\underbrace{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}_{=1})\,d\varphi = 2\pi \neq 0 \quad !$$

Slutsats: Det finns ingen potentialfunktion till (P,Q), trots att $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$!

(Observera att $(x,y) = (0,0)$ är en "farlig" punkt.)