Föreläsning 19 (1)

Volymberäkning:

Ex: Beräkna volymen av den kropp K som begränsas av ytorna $x^2+y^2-z^2=0,\ z\geq 0,$

och $z=2-x^2-y^2$.

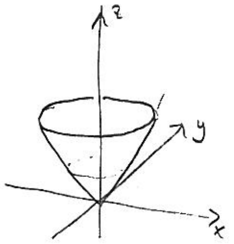
Lösning: Rita kroppen!

yta1: $x^2+y^2-z^2=0\,,\ z\geq 0$

$\Leftrightarrow \quad z=\underset{(-)}{+}\sqrt{x^2+y^2}$

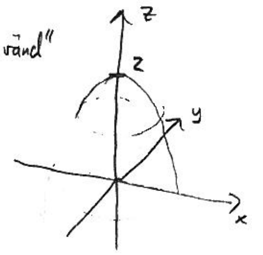
Sätt $y=0$: $z=\sqrt{x^2}=|x|$

Rotation kring z-axeln ger en kon.



yta2: Även denna är rotationssymmetrisk kring z-axeln.

Sätt $y=0$: $z=2-x^2$. Rotation av denna parabel ger en "upp- och nervänd" paraboloid ("skål")

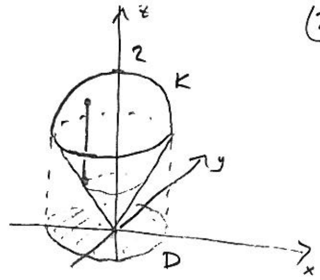


Kombinerar vi dessa får vi kroppen K:

(2)

En "glasstrut"!

Övre ytan är $z=2-(x^2+y^2)$ och den undre är $z=\sqrt{x^2+y^2}$, dvs.



$$\sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq 2-(x^2+y^2).$$

Vi bestämmer det område D i xy-planet vi ska integrera över:

$$\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z=2-(x^2+y^2)\end{cases} \Rightarrow \quad z=2-z^2$$

OBS! $z\geq 0$

$\Leftrightarrow \quad z^2+2z-2=0 \quad \Leftrightarrow \quad z=1$ eller $(z=-2)$

D är en cirkelskiva med radie 1:

$$z=\sqrt{x^2+y^2}=1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x^2+y^2=1}}\,.$$

Nu beräknar vi volymen:

$$V=\iiint_K 1\,dxdydz=\iint_D\left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2-(x^2+y^2)}1\,dz\right)dxdy=$$

$$=\iint_D\Big[z\Big]_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2-(x^2+y^2)}dxdy=\iint_D\left(2-(x^2+y^2)-\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy=$$

(3)

$$=\left[\text{pol. koord. }\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{cases},\ 0\leq r\leq 1,\ 0\leq\theta\leq 2\pi\right]=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1(2-r^2-r)\cdot r\,dr\right)d\varphi=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1(2r-r^3-r^2)dr\right)d\varphi=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[r^2-\tfrac{1}{4}r^4-\tfrac{1}{3}r^3\right]_0^1 d\varphi=\int_0^{2\pi}\frac{5}{12}\,d\varphi=\frac{5}{12}\cdot 2\pi=\underline{\underline{\frac{5}{6}\pi}}.\ \square$$

OBS! Svaret är positivt (annars har vi gjort fel)

Allmänt: En kropp som ges av

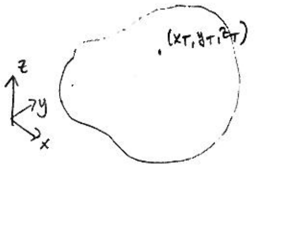
$$f(x,y)\leq z\leq g(x,y),\qquad (x,y)\in D$$

har volymen $$V=\iint_D\big(g(x,y)-f(x,y)\big)\,dxdy.$$

Masscentrum (tyngdpunkt):

Endim: För kropp K med massa m får vi t.ex.

$$x_T=\frac{1}{m}\int_K x\,dm$$



Vi måste då kunna uttrycka dm i en variabel

Problem!

(4)

Flerdim:

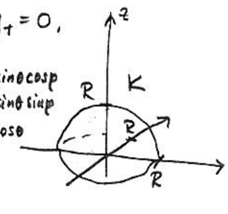
$$x_T=\frac{1}{\underbrace{\iiint_K\rho(x,y,z)\,dxdydz}_{=m}}\cdot\iiint_K x\cdot\underbrace{\rho(x,y,z)\,dxdydz}_{dm}$$

Ex: Beräkna tyngdpunktens läge för det homogena halvklotet

K: $x^2+y^2+z^2\leq R^2,\quad z\geq 0.$

Lösning: Av symmetriskäl är $x_T=y_T=0$.

z_T: Med rymdpolära koordinater $\begin{cases}x=r\sin\theta\cos\varphi\\ y=r\sin\theta\sin\varphi\\ z=r\cos\theta\end{cases}$ så övergår K i E: $\begin{cases}0\leq r\leq R\\ 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\\ 0\leq\varphi\leq 2\pi\end{cases}$.



K homogen $\Rightarrow$ vi kan anta att $\rho(x,y,z)=1$, och

- $$\iiint_K z\cdot 1\,dxdydz=\iiint_E r\cos\theta\cdot\overbrace{r^2\sin\theta}^{\text{funk det}}\,drd\theta d\varphi=$$

$$=\left(\int_0^R r^3\,dr\right)\cdot\left(\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\,d\theta\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi}1\cdot d\varphi\right)=$$

$$=\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^R\cdot\left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\pi/2}\cdot 2\pi=\frac{R^4}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi=\frac{\pi R^4}{4}$$

- $$\iiint_K 1\,dxdydz=\text{halvklotets volym}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi R^3}{3}=\frac{2\pi R^3}{3}$$

$$\Rightarrow \quad z_T = \frac{1}{\frac{2\pi R^2}{3}} \cdot \frac{\pi R^4}{4} = \frac{3}{8}R.$$

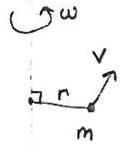
$\square$

Svar: $(0, 0, \frac{3}{8}R)$

Tröghetsmoment:

(Fysik) • Kinetisk energi för massa m med fart v är $E = \frac{mv^2}{2}$.

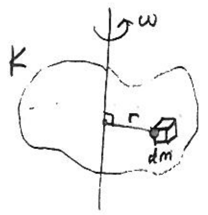
• Rotation med radie r och vinkelhastighet ω (rad/s)



$$\Rightarrow \quad v = r\omega \text{ och } E = \frac{m(r\omega)^2}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\omega^2 r^2 m}}$$

Stel kropp roterar: Massbiten dm har energi $dE = \frac{1}{2}\omega^2 r^2 dm$

=> hela kroppens energi blir



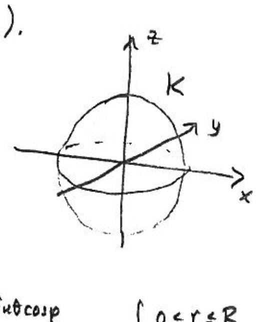
$$\int_K dE = \underbrace{\frac{1}{2}\omega^2}_{\text{beror ej av } K} \underbrace{\int_K r^2\,dm}_{\text{tröghetsmomentet } J}$$

I vår kurs: $J = \iiint_K r(x,y,z)^2 \underbrace{\overset{\text{densitet}}{\rho(x,y,z)}\,dxdydz}_{dm}$

Anm: Om rotationsaxeln är z-axeln så blir
$$r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Ex: Beräkna tröghetsmomentet m.a.p. z-axeln för den homogena kroppen K: $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ med densitet 1 (i någon enhet).

Lösning: K klot med radie R.



Vi skall beräkna

$$J = \iiint_K (x^2+y^2)\cdot 1\,dxdydz.$$

Rymdpolära koordinater $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$, $E: \begin{cases} 0 \le r \le R \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$.

Vi får $x^2+y^2 = r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi =$
$= r^2\sin^2\theta(\underbrace{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}_{=1}) = r^2\sin^2\theta$,

så
$$J = \iiint_E r^2\sin^2\theta \cdot \overset{\text{funk.det}}{r^2\sin\theta}\,dr\,d\theta\,d\varphi =$$
$$= \left(\int_0^R r^4\,dr\right)\cdot\left(\int_0^\pi \sin^3\theta\,d\theta\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi} 1\,d\varphi\right) =$$
$$= 2\pi\left[\frac{1}{5}r^5\right]_0^R \cdot \left(\int_0^\pi (1-\cos^2\theta)\sin\theta\,d\theta\right) =$$

$$= 2\pi\cdot\frac{R^5}{5}\cdot\left[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^\pi = \frac{2\pi R^5}{5}\cdot\Big(\overbrace{1-\frac{1}{3}-(-1+\frac{1}{3})}^{=4/3}\Big) =$$
$$= \frac{8\pi R^5}{15}$$

OBS! Med rymdpolära koordinater blir $x^2+y^2 = r^2\sin^2\theta$, inte r^2.

Överkurs:

Area av enhetscirkelskivan $x^2+y^2 \le 1$ $= \iint_D 1\,dxdy = \pi\cdot 1^2 = \underline{\underline{\pi}}$

Volym av enhetsklotet $x^2+y^2+z^2 \le 1$ $= \iiint_K 1\,dxdydz = \frac{4\pi}{3}\cdot 1^3 = \underline{\underline{\frac{4\pi}{3}}}$

"Hypervolym" av "hyperklotet" $x^2+y^2+z^2+w^2 \le 1$ $= \iiiint_H 1\,dxdydzdw = ?$

Fixera w! Vi integrerar 1:an över det 3-dim klotet
$$K_w: x^2+y^2+z^2 \le 1-w^2 = (\sqrt{1-w^2})^2$$
med radie $\sqrt{1-w^2}$.

$$\iiiint_H 1\,dxdydzdw = \int_{-1}^1 \Big(\underbrace{\iiint_{K_w} 1\,dxdydz}_{=\text{Volym av } K_w = \frac{4\pi}{3}(\sqrt{1-w^2})^3}\Big)\,dw =$$

$$= \frac{4\pi}{3}\int_{-1}^1 (1-w^2)^{3/2}\,dw = \frac{8\pi}{3}\int_0^1 (1-w^2)^{3/2}\,dw =$$

jämn funktion!

$$= \begin{bmatrix} w = \sin\theta \\ dw = \cos\theta\,d\theta \end{bmatrix} = \frac{8\pi}{3}\int_0^{\pi/2} (\underbrace{1-\sin^2\theta}_{=\cos^2\theta})^{3/2}\cos\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{8\pi}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta = \frac{8\pi}{3}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^4 \overset{\text{binomialsatsen}}{=}$$

$$= \frac{8\pi}{3}\cdot\frac{1}{16}\int_0^{\pi/2}\left(e^{i4\theta} + 4e^{i2\theta} + 6 + 4e^{-i2\theta} + e^{-i4\theta}\right)d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{6}\int_0^{\pi/2}\Big(2\cdot\underbrace{\frac{e^{i4\theta}+e^{-i4\theta}}{2}}_{\cos 4\theta} + 8\cdot\underbrace{\frac{e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}}{2}}_{\cos 2\theta} + 6\Big)\,d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{6}\left[\frac{1}{2}\sin 4\theta + 4\sin 2\theta + 6\theta\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(0 + 0 + 6\cdot\frac{\pi}{2} - 0 - 0 - 0\right) = \underline{\underline{\frac{\pi^2}{2}}}.$$

Allmän formel: n-dimensionellt enhetsklot

$$V_n = \frac{2^{\frac{n+1}{2}}}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot n}\pi^{\frac{n-1}{2}} \qquad n \text{ udda}$$

$$V_n = \frac{2^{n/2}}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot n}\pi^{n/2} \qquad n \text{ jämnt}.$$