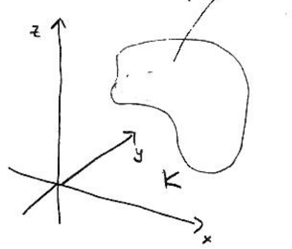
Föreläsning 18

1

Trippelintegraler:

$$\iiint_K f(x,y,z)\, dxdydz$$

där K är en kropp i rummet.



Definieras på motsv. sätt som dubbelintegralen: vi approximerar med "trappfunktioner", funktioner som är konstanta på axelparallella "lådor".

Eftersom vi inte kan rita grafen till f så är det svårt att göra en geometrisk tolkning av integralen, men däremot kan vi göra en fysikalisk:

Om K kropp i rummet och $\rho(x,y,z)$ anger densiteten av K i punkten (x,y,z) så är K:s massa

$$\boxed{M = \iiint_K \rho(x,y,z)\, dxdydz}$$

(Motsv. resonemang med Riemannsummor som vi gjorde i en tidigare föreläsning.)

2

Speciellt: Genom att sätta $\rho(x,y,z) = 1$, så gäller det att massan = volymen! Vi får alltså

$$\boxed{V = \iiint_K 1\, dxdydz}$$

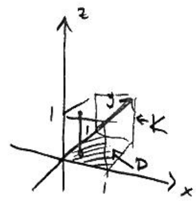
Alternativt sätt att beräkna en volym!

Upprepad integration fungerar "som vanligt". Vi börjar med ett lådformat område K:

Ex: Beräkna

$$I = \iiint_K xy^2z^3\, dxdydz,$$

där D: $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1$.

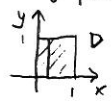


Lösning:

$$I = \iint_D \left(\int_0^1 xy^2z^3\, dz\right) dxdy = (*)$$

Vi får en "dubbelintegral av en enkelintegral!

D kvadraten $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$ i xy-planet



3

$$(*) = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 xy^2z^3\, dz\right) dy\right) dx =$$

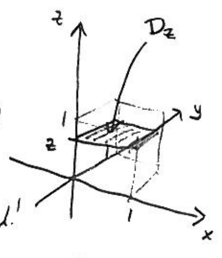
$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left[\frac{1}{4}xy^2z^4\right]_0^1 dy\right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{1}{4}xy^2\, dy\right) dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{4\cdot 3}xy^3\right]_0^1 dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{12}x\, dx = \left[\frac{1}{24}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{24}$$

Alternativ (t.ex.):

$$I = \int_0^1 \left(\iint_{D_z} xy^2z^3\, dxdy\right) dz = (*)$$



En enkelintegral av en dubbelintegral!

$$(*) = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 xy^2z^3\, dy\right) dx\right) dz = \quad D_z: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \\ \text{"}z = z\text{"} \end{cases}$$

$$= \int_0^1 \left(\ldots\ldots \right) = \ldots = \frac{1}{24}$$

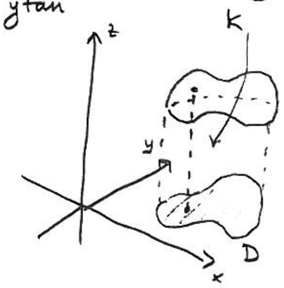
Det finns alltså ett stort antal sätt att beräkna trippelintegraler!

4

Ex: Beräkna volymen under ytan

$$z = f(x,y)$$

definierad på D i xy-planet



Lösning: Vi ska beräkna

$$V = \iiint_K 1\, dxdydz, \quad \text{där } K \text{ ges av } 0 \le z \le f(x,y),\ (x,y) \in D.$$

Vi börjar med att integrera i z-led:

$$V = \iint_D \left(\int_0^{f(x,y)} 1\, dz\right) dxdy = \iint_D [z]_0^{f(x,y)} dxdy =$$

$$= \iint_D f(x,y)\, dxdy$$

Stämmer med tidigare kapitel!

Ex: Beräkna

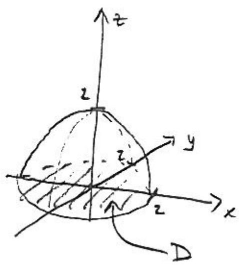
$$I = \iiint_K z\, dxdydz$$

där K är halvklotet $x^2+y^2+z^2 \le 4,\ z \ge 0$.

Lösning 1: Den övre ytan har ekvation $z = \sqrt{4-(x^2+y^2)}$, och den undre $z = 0$.

⑤

Projicerar vi kroppen K i xy-planet får vi cirkelskivan $D:\ x^2+y^2\le 4$. Alltså är



$$I=\iint_D\left(\int_0^{\sqrt{4-(x^2+y^2)}} z\,dz\right)dxdy=$$

$$=\iint_D\left[\tfrac{1}{2}z^2\right]_0^{\sqrt{4-(x^2+y^2)}}dxdy=\frac{1}{2}\iint_D\left(4-(x^2+y^2)\right)dxdy=$$

$$=\left[\text{pol. koord. }\begin{cases}x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\end{cases},\quad E:\begin{cases}0\le r\le 2\\ 0\le\varphi\le 2\pi\end{cases}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\iint_E(4-r^2)\cdot\underbrace{r}_{\text{OBS!}}\,drd\varphi=\frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi}1\,d\varphi\right)\left(\int_0^2(4r-r^3)\,dr\right)=$$

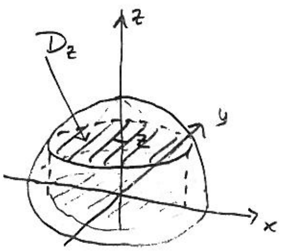
$$=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\left[2r^2-\frac{1}{4}r^4\right]_0^2=\pi(8-4)=\underline{\underline{4\pi}}.$$

Lösning 2: Alternativt "enkelintegral av dubbelintegral"

$D_z:\quad x^2+y^2\le 4-z^2$

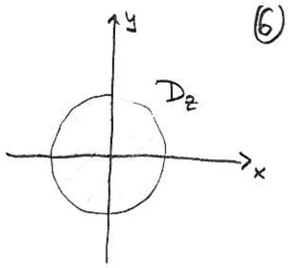
cirkelskiva med radie $\sqrt{4-z^2}$

$\Rightarrow$ arean $=\pi(4-z^2)$



⑥

Vi får



$$I=\int_0^2\left(\iint_{D_z} z\,dxdy\right)dz=$$

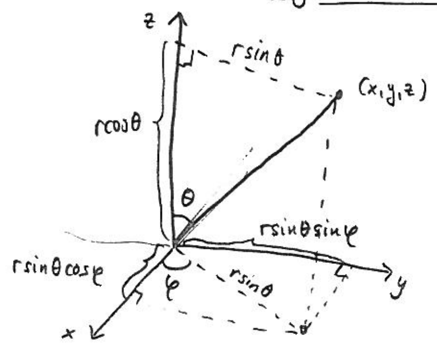
$$=\int_0^2 z\Big(\underbrace{\iint_{D_z}1\,dxdy}_{=\text{arean av } D_z=\pi(4-z^2)}\Big)dz=$$

$$=\int_0^2 z\pi(4-z^2)\,dz=\pi\int_0^2(4z-z^3)\,dz=$$

$$=\pi\left[2z^2-\frac{1}{4}z^4\right]_0^2=\underline{\underline{4\pi}}.\quad \square$$

Variabelbyte

Fungerar som tidigare. Motsvarigheten till polära koordinater i rummet är rymdpolära koordinater:



⑦

I figuren ser vi att

$$\begin{cases}x=r\sin\theta\cos\varphi\\ y=r\sin\theta\sin\varphi\\ z=r\cos\theta\end{cases}\quad\text{där}\quad \begin{array}{l}0\le\varphi\le 2\pi\\ 0\le\theta\le\pi\end{array}$$

Vi beräknar funktionaldeterminanten:

$$\frac{d(x,y,z)}{d(r,\theta,\varphi)}=\begin{vmatrix}x'_r & x'_\theta & x'_\varphi\\ y'_r & y'_\theta & y'_\varphi\\ z'_r & z'_\theta & z'_\varphi\end{vmatrix}=\underbrace{\ldots\ldots}_{\text{övning!}}=\underline{\underline{r^2\sin\theta}}$$

Får lov att memoreras!

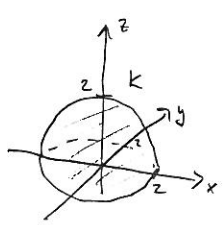
$0\le\theta\le\pi\ \Rightarrow\ r^2\sin\theta\ge 0$ så absolutbelopp behövs ej.

Ex (igen): $\quad I=\iiint_K z\,dxdydz,$

där K är halvklotet $x^2+y^2+z^2\le 4,\ z\ge 0$.

Lösn. 3: Halvklotet ges i rymdpolära koordinater av

$$L:\begin{cases}0\le r\le 2\\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\\ 0\le\varphi\le 2\pi\end{cases},\ \text{så}$$



variabelbyte ger

⑧

$$I=\iiint_L r\cos\theta\cdot r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi=$$

$$=\left(\int_0^2 r^3\,dr\right)\left(\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\,d\theta\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi}1\,d\varphi\right)=$$

$$=\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^2\cdot\left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\pi/2}\cdot 2\pi=$$

$$=4\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi=\underline{\underline{4\pi}}.\quad \square$$