LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA ht 2011
MATEMATIK

# Instuderingsfrågor i flerdimensionell analys

**Anvisningar.** Avsikten med dessa repetitionsfrågor är att ge dig möjlighet att kontrollera att du någorlunda behärskar kursen. Om du märker att du inte kan svara på någon av de här frågorna bör du gå tillbaka till motsvarande avsnitt i läroboken, eftersom det är troligt att du behöver repetera detta.

## Funktioner

1. Vad menas med en inre punkt, yttre punkt respektive randpunkt till en mängd $M$ i $\mathbf{R}^n$?

2. Vad menas med att en mängd $M$ i $\mathbf{R}^n$ är

   a) öppen, b) sluten, c) begränsad, d) kompakt?

   Ge exempel.

3. Vad menas med en funktion från $\mathbf{R}^n$ till $\mathbf{R}^p$? Ge några exempel då $p = 1$ och några exempel då $n = 1$.

   Betrakta funktioner från $\mathbf{R}^2$ till $\mathbf{R}^1$. Vad menas med grafen till en sådan funktion? Ge exempel. Vad menas med en funktionsyta? Vad är värdemängden? Ge exempel. Vad menas med en nivåkurva?

   Betrakta funktioner från $\mathbf{R}^3$ till $\mathbf{R}^1$. Vad menas med grafen? Vad är värdemängden till en sådan funktion? Ge exempel. Vad menas med en nivåyta?

   Betrakta funktioner från $\mathbf{R}^1$ till $\mathbf{R}^2$? Vad är grafen? Vad är värdemängden?

   Förklara hur en cirkel (eller annan kurva i planet) kan beskrivas med hjälp av en funktion från $\mathbf{R}^1$ till $\mathbf{R}^2$ eller med hjälp av en funktion från $\mathbf{R}^2$ till $\mathbf{R}^1$.

4. Hur inför man a) polära koordinater i planet, b) rymdpolära koordinater?

5. Låt $\boldsymbol{f}$ vara en funktion från $\mathbf{R}^n$ till $\mathbf{R}^p$. Vad menas med att $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{b}$ då $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$? Vad menas med att $\boldsymbol{f}$ är kontinuerlig i $\boldsymbol{a}$? Vad menas med en kontinuerlig funktion?

## Differentialkalkyl för reellvärda funktioner

6. Vad menas med att den reellvärda funktionen $f(x_1, \ldots, x_n)$ är partiellt deriverbar i punkten $(a_1, \ldots, a_n)$? Vilken är den geometriska betydelsen av de partiella derivatorna om $n = 2$?

7. Ange alla funktioner $f(x, y)$ i planet som uppfyller den partiella differentialekvationen $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$.

8. Vad menas med att funktionen $f$ från $\mathbf{R}^n$ till $\mathbf{R}$ är differentierbar i en punkt $\boldsymbol{a}$? Vad menas med differentialen i en punkt? Ge en geometrisk tolkning av differentialen i en punkt då $n = 2$. Förklara varför en funktion av två variabler som är differentierbar i hela $\mathbf{R}^2$ har tangentplan i alla punkter.

9. Visa att om funktionen $f(x, y)$ är differentierbar så är den också

   a) kontinuerlig, b) partiellt deriverbar.

10. Vilken förutsättning måste vara uppfylld om en yta $z = f(x, y)$ ska ha tangentplan i en punkt $(a, b, f(a, b))$? Ange en ekvation för tangentplanet till ytan $z = f(x, y)$ i punkten $(a, b, f(a, b))$.

11. Formulera kedjeregeln för en sammansatt funktion av formen

    a) $h(t) = f(g_1(t), g_2(t))$
    b) $g(t) = f(x(t), y(t), z(t))$
    c) $g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$
    d) $g(x, y, z) = f(r(x, y, z))$

    och bevisa a).

12. Definiera begreppet gradient $\operatorname{grad} f$, om $f$ är en reellvärd funktion av flera variabler. Ange en geometrisk tolkning.

13. Definiera begreppet riktningsderivata för en reellvärd funktion av två variabler. Ange en formel för beräkning av riktningsderivatan. Bevisa formeln.

14. I vilken riktning har $f(x, y)$ sin maximala tillväxthastighet, och hur stor är denna? Bevisa ditt påstående.

15. Bevisa att vektorn $\operatorname{grad} f(a, b)$ är normal till kurvan $f(x, y) = f(a, b)$ i punkten $(a, b)$.

16. Hur kan resultatet i föregående fråga användas för att bestämma en ekvation för tangenten i $(a, b)$ till kurvan? Generalisera till ytor och tangentplan.

17. Formulera Taylors formel av andra ordningen för en funktion av två variabler och skissera beviset.

18. Definiera begreppet stationär punkt för en funktion av flera variabler.

19. Vad menas med att en reellvärd funktion av två variabler har lokalt maximum (minimum) i en punkt $\boldsymbol{a}$?

20. Bevisa att en lokal inre extrempunkt för en reellvärd, partiellt deriverbar funktion av två variabler är en stationär punkt.

21. Vad menas med att en kvadratisk form $Q$ på $\mathbf{R}^n$ är

    a) positivt (negativt) definit, b) indefinit, c) semidefinit?

    Ge exempel på sådana former i två och tre variabler.

22. Antag att $\boldsymbol{a}$ är en stationär punkt för funktionen $f$. Vilka slutsatser om funktionens uppförande i en omgivning av $\boldsymbol{a}$ kan man dra med hjälp av den kvadratiska formen i Taylorutvecklingen av $f$ i $\boldsymbol{a}$?

### Differentialkalkyl för vektorvärda funktioner

23. Hur bestämmer man tangenten till en kurva $t \mapsto \boldsymbol{x}(t)$ i parameterform? Fysikalisk betydelse?

24. Låt $\boldsymbol{f}$ vara en funktion från $\mathbf{R}^n$ till $\mathbf{R}^m$. Vad menas med dess funktionalmatris och funktionaldeterminant (om $n = m$)? Vad menas med linjariseringen av $\boldsymbol{f}$?

25. Formulera implicita funktionssatsen i fallet $F(x, y) = C$ om man vill lösa ut

    a) $y$ som funktion av $x$, b) $x$ som funktion av $y$.

    Motivera med en figur.

### Optimering

26. Hur går man till väga för att bestämma det största (minsta) värdet av en funktion $f(x, y)$ definierad på en kompakt mängd i $\mathbf{R}^2$? Vilken sats utgör den teoretiska grunden för metoden?

27. Studera något exempel på hur man genom avskärning ibland kan återföra optimeringsproblemet över en icke-kompakt mängd på det kompakta fallet.

28. a) Betrakta problemet att söka maximum av en funktion $f(x, y)$ under bivillkoret $g(x, y) = 0$. Visa att om $(a, b)$ är en maximipunkt så är vektorerna $\operatorname{grad} f(a, b)$ och $\operatorname{grad} g(a, b)$ parallella.

    b) För praktiskt räknebruk kan resultatet i a), och motsvarande i tre variabler, formuleras antingen med Lagranges multiplikatorer eller (ibland) med en determinant. Hur går detta till?

### Dubbelintegraler

29. Formulera två varianter för beräkning av en dubbelintegral som itererad enkelintegral.

30. Vad menas med en Riemannsumma? Vad händer med en sådan då indelningens finhet går mot noll?

31. Skriv upp formeln för variabelbyte i en dubbelintegral. Förklara de ingående beteckningarna och ange förutsättningarna.

**Trippelintegraler**

32. Beskriv några metoder att beräkna trippelintegraler.

**Användningar av integraler**

33. Hur beräknar man volymer med användning av dubbelintegral? När kan man ha nytta av att använda trippelintegral?

**Vektoranalys i planet**

34. Hur beräknar man en kurvintegral direkt enligt definitionen?

35. Ge en fysikalisk tolkning av begreppet kurvintegral.

36. a) Formulera Greens formel med alla förutsättningar.

    b) Bevisa formeln i fallet $Q = 0$ och $D = \{\,(x, y)\,;\phi(x) \le y \le \psi(x), a \le x \le b\,\}$.

37. Ge exempel på att Greens formel inte kan användas om förutsättningarna saknas i någon punkt.

38. Härled med hjälp av Greens formel en metod att beräkna arean av ett plant område.

39. Vad menas med ett potentialfält (konservativt fält) och vad menas med en potential? Vad menas med en exakt differentialform?

40. Hur går man tillväga för att bestämma potentialen till ett konservativt fält?

41. a) Visa att för ett konservativt fält $\boldsymbol{F} = (P, Q)$ med potentialen $U$ är

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = U(\boldsymbol{b}) - U(\boldsymbol{a}),$$

    om $\boldsymbol{a}$ och $\boldsymbol{b}$ är begynnelse- respektive slutpunkt på kurvan $\gamma$.

    b) Av a) följer att för ett potentialfält är kurvintegralen oberoende av vägen. Gäller omvändningen?

42. a) Visa att om kraftfältet $(P, Q)$ är konservativt så är $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. För att även omvändningen skall gälla fordras att fältet är definierat i ett område $\Omega$ med en speciell egenskap. Vilken?

    b) Skissera beviset för att likheten $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ medför att fältet är konservativt under denna extra förutsättning.

    c) Ge exempel som visar att utan denna extra förutsättning kan man inte dra några slutsatser.