Föreläsning 3.

Gradienten

(1)

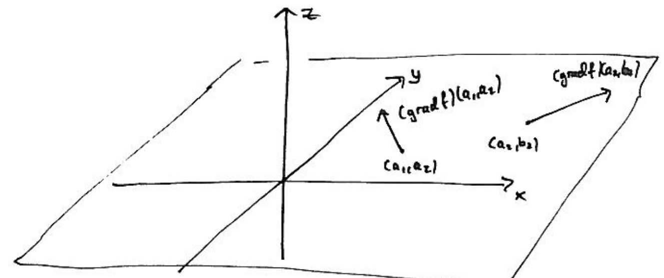
Partiella derivator ger oss information om hur en funktion uppför sig i riktningar parallella med koordinataxlarna.

Betrakta nu en funktion $f(x,y)$ och punkten (a,b).

Vi bildar vektorn

$$\boxed{(\operatorname{grad} f)(a,b) = (f'_x(a,b), f'_y(a,b))}$$

som kallas gradienten av f i punkten (a,b). (Vi "samlar" helt enkelt de partiella derivatorna i en vektor.) Denna är en vektor i planet, och vi kan rita ut denna i xy-planet:



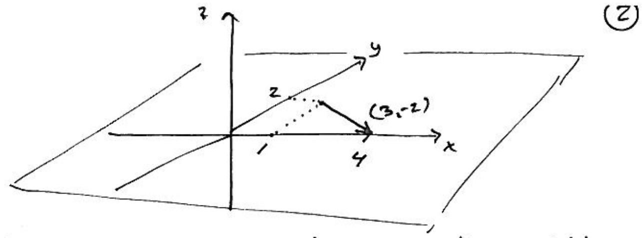
Ex: För $f(x,y) = x^2y - xy^3$ får vi

$$\operatorname{grad} f = (f'_x, f'_y) = (2xy - y^3, x^2 - 3xy^2).$$

I t.ex. punkten $(2,1)$ blir därför

$$(\operatorname{grad} f)(2,1) = (2\cdot2\cdot1 - 1^3, 2^2 - 3\cdot2\cdot1^2) =$$
$$= (3, -2)$$

(2)



Vi har motsvarande def. för funk av flera variabler, t.ex. $(\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R})$

$$\operatorname{grad} f = (f'_x, f'_y, f'_z)$$ vektor i $\mathbb{R}^3$!

Om vi sätter $\bar{g}(t) = (g_1(t), g_2(t))$ så ger kedjeregeln för $f(\bar{g}(t)) = f(g_1(t), g_2(t))$ att

$$\frac{d}{dt} f(\bar{g}(t)) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\frac{dg_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{dg_2}{dt} =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) \underset{\text{skalärprodukt}}{\cdot} \left(\frac{dg_1}{dt}, \frac{dg_2}{dt}\right) = (\operatorname{grad} f)(\bar{g}(t)) \cdot \bar{g}'(t)$$

Detta liknar "envariabelkedjeregeln", så grad f har "samma roll" som f' i envariabelfallet.

> **Sats:** Om
>
> $$\operatorname{grad} f = (0, 0, \ldots, 0) \qquad (=\bar{0})$$
>
> i alla punkter i ett område $D \subseteq \mathbb{R}^n$ så är
>
> f konstant i D.
>
> (Läs förutsättningar på D och f i Sats 5, s. 76)

(3)

Bevis ("skiss"):

$$\bar{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$$

$$\bar{a} = (a_1, a_2) = \bar{x}(0) \qquad \bar{b} = (b_1, b_2) = \bar{x}(1)$$

Enligt förutsättning finns det mellan två godtyckliga punkter $\bar{a}$ och $\bar{b}$ i D en kontinuerlig kurva $\bar{x}(t)$ $(0 \le t \le 1)$.

$f(\bar{x}(t)) = f(x_1(t), x_2(t))$ är en funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, och vi har

$$\frac{d}{dt} f(\bar{x}(t)) = (\operatorname{grad} f)(\bar{x}(t)) \cdot \bar{x}'(t) = \bar{0} \cdot \bar{x}'(t) = 0$$

$\Rightarrow f(\bar{x}(t))$ $(0 \le t \le 1)$ konstant enl. envariabelanalys, speciellt är $f(\bar{a}) = f(\bar{x}(0)) = f(\bar{x}(1)) = f(\bar{b})$. D

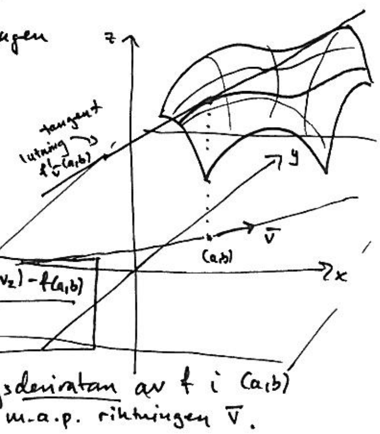
Riktningsderivata:

Derivering i godtycklig riktning $\bar{v} = (v_1, v_2)$ (i $\mathbb{R}^2$-fallet).

Vi vill ta fram lutningen längs linjen

$$(x,y) = (a,b) + t(v_1, v_2).$$

Vi antar att $|\bar{v}| = 1$ och definierar:



$$\boxed{f'_{\bar{v}}(a,b) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv_1, b + tv_2) - f(a,b)}{t}}$$

$f'_{\bar{v}}(a,b)$ kallas riktningsderivatan av f i (a,b) m.a.p. riktningen $\bar{v}$.

(4)

Hur beräknar man $f'_{\bar{v}}$ i praktiken?

> **Sats:** Förutsatt att $|\bar{v}| = 1$, så är
>
> $$f'_{\bar{v}}(a,b) = (\operatorname{grad} f)(a,b) \underset{\text{skalärprodukt}}{\cdot} \bar{v}$$

Bevis: Sätt $u(t) = f(a + tv_1, b + tv_2)$. $(u: \mathbb{R} \to \mathbb{R})$

Enligt ovan så ger kedjeregeln att

$$u'(t) = [(\operatorname{grad} f)(a + tv_1, b + tv_2)] \cdot (v_1, v_2),$$

ty de inre derivatorna är v_1 resp. v_2.

Vidare $f'_{\bar{v}}(a,b) = \lim_{t \to 0} \frac{u(t) - u(0)}{t} = u'(0)$ (Tänk!)

$\Rightarrow f'_{\bar{v}}(a,b) = (\operatorname{grad} f)(a,b) \cdot (v_1, v_2)$ D

Ex: $f(x,y) = x^2y + y^2$, $\bar{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)$ OBS! $|\bar{v}| = 1$.

Beräkna $f'_{\bar{v}}(1,2)$!

Lsg: $\begin{cases} f'_x = 2xy \\ f'_y = x^2 + 2y \end{cases} \Rightarrow \operatorname{grad} f = (2xy, x^2 + 2y)$

$\Rightarrow (\operatorname{grad} f)(1,2) = (4,5)$. Vi får nu enl. satsen att

$$f'_{\bar{v}}(1,2) = (\operatorname{grad} f)(1,2) \cdot \tfrac{1}{\sqrt{5}}(2,-1) = (4,5)\cdot\tfrac{1}{\sqrt{5}}(2,-1) = \frac{3}{\sqrt{5}}$$ D

Anm: Om t.ex. $\bar{v} = (1,0)$ så blir

$$f'_{\bar{v}} = (f'_x, f'_y)\cdot(1,0) = f'_x$$

De partiella derivatorna är specialfall av riktningsderivata

(5)

{ I vilken riktning är $f'_{\bar v}(\bar a)$ störst? }

$$f'_{\bar v}(\bar a) = (\text{grad } f)(\bar a)\cdot \bar v = |(\text{grad } f)(\bar a)|\,|\bar v|\cos\theta,$$

där θ vinkeln mellan $(\text{grad } f)(\bar a)$ och $\bar v$.

Som störst då $\cos\theta = 1 \Leftrightarrow \theta = 0 \Leftrightarrow$ $(\text{grad } f)(\bar a)$ och $\bar v$ parallella! Då får vi dessutom att $f'_{\bar v}(\bar a) = |(\text{grad } f)(\bar a)|\,\overset{=1}{|\bar v|} = |(\text{grad } f)(\bar a)|$!

Sats: $(\text{grad } f)(\bar a)$ pekar i den riktning i vilken funktionen växer snabbast i $\bar a$. Den maximala tillväxthast. är $|(\text{grad } f)(\bar a)|$

Ex: I vilken riktning är "kullen"

$$z = f(x,y) = \sqrt{9-(x^2+y^2)} \qquad (x^2+y^2 \le 9)$$

brantast om vi står i punkten P med (x,y)-koord. $(1,2)$?

Lsg:

$$\text{grad } f = \left(-\frac{x}{\sqrt{9-(x^2+y^2)}}, \frac{-y}{\sqrt{9-(x^2+y^2)}}\right)$$

ger $(\text{grad } f)(1,2) = (-\frac{1}{2}, -1)$ eller riktn. $(-1,-2)$.

I denna riktning är lutningen $|(-\frac{1}{2},-1)| = \frac{\sqrt5}{2}$. □

(6)

Anm: Riktningen är mot origo, vilket verkar rimligt!

Låt oss nu gå tillbaka och studera nivåkurvor

$$f(x,y) = C$$

Parametrisering $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t)\end{cases}$ av kurvan ger en funktion $u(t) = f(x(t), y(t)) = C$. Derivering m.h.a kedjeregeln ger

$$u'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = 0,$$ vilket

också kan ses som att

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = 0, \text{ dvs. } (\text{grad } f)\cdot\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = \bar 0.$$

Vektorerna grad f och $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$ är ortogonala! Eftersom $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$ är tangentvektor till kurvan så får vi att

[redacted] $(\text{grad } f)(a,b)$ är en normalvektor till nivåkurvan till f som går genom (a,b).

(7)

Ex: För att studera normaler till enhetscirkeln $x^2+y^2=1$, så ser vi den som en nivåkurva till

$$f(x,y) = x^2+y^2.$$ Vi har då

$\text{grad } f = (2x, 2y)$. I punkten $P: (\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2})$ får vi således normalen

$$\bar n = (\text{grad } f)\left(\tfrac{1}{\sqrt2}, \tfrac{1}{\sqrt2}\right) = \left(\tfrac{2}{\sqrt2}, \tfrac{2}{\sqrt2}\right) = (\sqrt2, \sqrt2).$$

Ex: Kurvorna

$$C_1:\; x^2+xy+3y^2 = 5$$

och $C_2:\; x + y^2 = -1$

går båda genom $P:(-2,1)$. Bestäm vinkeln mellan kurvorna i P.

Lsg: Vinkeln mellan kurvorna = vinkeln mellan normalerna $\bar n_1$ o $\bar n_2$.

Sätt $\begin{cases} f(x,y) = x^2+xy+3y^2 \\ g(x,y) = x + y^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{grad } f = (2x+y,\, x+6y) \\ \text{grad } g = (1,\, 2y) \end{cases}$$

(8)

I $P:(-2,1)$ får vi $\bar n_1 = (-3,4)$ resp. $\bar n_2 = (1,2)$.

$$\bar n_1\cdot\bar n_2 = |\bar n_1||\bar n_2|\cos\theta \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{\bar n_1\cdot\bar n_2}{|\bar n_1||\bar n_2|} =$$

$$= \frac{(-3,4)\cdot(1,2)}{|(-3,4)|\cdot|(1,2)|} = \frac{-3\cdot1+4\cdot2}{\sqrt{(-3)^2+4^2}\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{5}{\sqrt{25}\sqrt5} = \frac{1}{\sqrt5}$$

Svar: $\theta = \arccos\frac{1}{\sqrt5}$ $(\approx 63°)$

[redacted] På motsv. sätt är $\text{grad } f = (f'_x, f'_y, f'_z)$ (i $\mathbb{R}^3$) normalvektor till motsv. nivåyta.

Ex: Bestäm en ekvation för tangentplanet π till ellipsoiden $E:\; x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 3$ i $P:(1,2,3)$.

Lösn: E är en nivåyta till funk.

$$f(x,y,z) = x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9}.$$

$$\text{grad } f = \left(2x, \tfrac{1}{2}y, \tfrac{2}{9}z\right) \Rightarrow (\text{grad } f)(1,2,3) = \tfrac{1}{3}(6,3,2)$$

Alltså är $(6,3,2)$ en normalvektor till E i P $\Rightarrow$ normalvektor till π! Tangentplanet π har därför ekv.

$$6x + 3y + 2z + D = 0$$

Punkten P ligger i π $\Rightarrow$ $6\cdot1 + 3\cdot2 + 2\cdot3 + D = 0$

$\Leftrightarrow D = -18$ Svar: $6x + 3y + 2z - 18 = 0$

(Nytt sätt att bestämma tangentplan!)