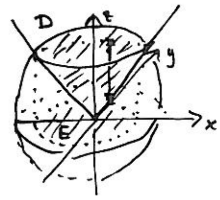
Uppgifter 17/5 (1)

7.4. Beräkna

$$I=\iiint_D \frac{z}{1+x^2+y^2}\,dxdydz,$$

där $D=\{(x,y,z);\ x^2+y^2+z^2\le 1,\ z\ge\sqrt{x^2+y^2}\}$.

Lösning: Rita området!



Sfär + kon.

Integrerar först i z-led. Behöver då beräkna området E:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z=\sqrt{x^2+y^2}\end{cases} \Rightarrow\ z^2+z^2=1 \iff z=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Området E ges av $\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{\sqrt2} \iff x^2+y^2=\left(\frac{1}{\sqrt2}\right)^2$

Cirkel med radie $\frac{1}{\sqrt2}$. Vi får nu

$$I=\iint_E\left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}\frac{z}{1+x^2+y^2}\,dz\right)dxdy=\iint_E\left[\frac{z^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2+y^2}\right]_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}dxdy=$$

$$=\iint_E\left(\frac{1-(x^2+y^2)}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2+y^2}-\frac{x^2+y^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2+y^2}\right)dxdy$$

funk. determ.

$$\overset{\text{pol.koord.}}{=}\ \frac12\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{1/\sqrt2} r\left(\frac{1-r^2}{1+r^2}-\frac{r^2}{1+r^2}\right)dr\right)d\theta=$$

(2)

pol.div.

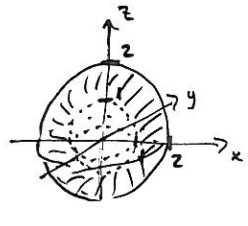
$$=\frac12\cdot 2\pi\cdot\int_0^{1/\sqrt2}\frac{r-2r^3}{1+r^2}\,dr=\pi\int_0^{1/\sqrt2}\left(-2r+\frac{3r}{r^2+1}\right)dr=$$

$$=\pi\left[-r^2+\frac32\ln(r^2+1)\right]_0^{1/\sqrt2}=\pi\left(-\frac12+\frac32\ln\frac32\right)=\underline{\underline{\frac{\pi}{2}\left(3\ln\frac32-1\right)}}.$$

7.7. Området D utgörs av det sfäriska skalet $1\le x^2+y^2+z^2\le 4$. Beräkna

$$I=\iiint_D\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz.$$

Lösning: Rita området!



Klot med radier 1 och 2.

Vi använder rymdpolära koordinater:

$$\begin{cases}x=r\sin\theta\cos\varphi\\ y=r\sin\theta\sin\varphi\\ z=r\cos\theta\end{cases}\quad\text{ger området } E:\begin{cases}1\le r\le 2\\ 0\le\theta\le\pi\\ 0\le\varphi\le 2\pi\end{cases}$$

funk. det.

$$I=\iiint_E\frac{1}{\cancel{r^2}}\,\cancel{r^2}\sin\theta\,drd\theta d\varphi=$$

$$=\left(\int_1^2 1\,dr\right)\cdot\left(\int_0^\pi\sin\theta\,d\theta\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi}1\,d\varphi\right)=\ldots=\underline{\underline{4\pi}}.$$

8.6. Beräkna volymen av den kropp som ges av (3)

$$x^2+y^2\le 4x,\qquad |z|\le x^2+y^2.$$

Lösning: Rita området!

$$x^2+y^2\le 4x \iff x^2-4x+y^2\le 0 \iff$$

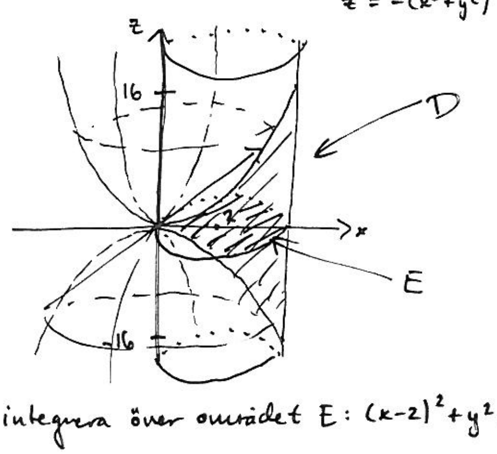
$$(x-2)^2-4+y^2\le 0 \iff (x-2)^2+y^2\le 2^2$$

cylinder med radie 2 och symmetriaxel genom (2,0,0) parallell med z-axeln.

$$|z|\le x^2+y^2 \iff -(x^2+y^2)\le z\le x^2+y^2$$

Området mellan paraboloiderna $z=x^2+y^2$ o $z=-(x^2+y^2)$

Vi får



Vi vill integrera över området E: $(x-2)^2+y^2\le 2^2$ i xy-planet.

(4)

$$\text{Volym}=\iiint_D 1\,dxdydz=\iint_E\left((x^2+y^2)-(-(x^2+y^2))\right)dxdy$$

$$=2\iint_E(x^2+y^2)\,dxdy=2\iint_F\left((2+r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2\right)r\,drd\theta$$

polära koordinater

$$\begin{cases}x=2+r\cos\theta & \leftarrow\text{OBS!}\\ y=r\sin\theta\end{cases}\qquad F:\begin{cases}0\le r\le 2\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$$

$$\frac{d(x,y)}{d(r,\theta)}=r$$

$$=2\iint_F\left(r^3\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{=1}+4r^2\cos\theta+4r\right)drd\theta=$$

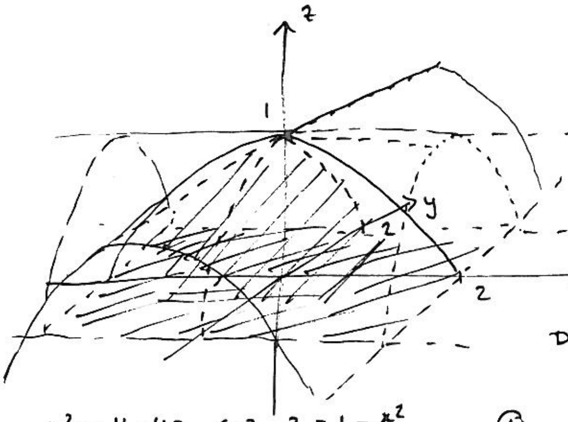
$$=2\int_0^{2\pi}\left(\left[\frac{r^4}{4}+\frac43 r^3\cos\theta+2r^2\right]_0^2\right)d\theta=$$

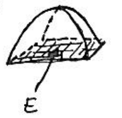
$$=2\int_0^{2\pi}\left(4+\frac{32}{3}\cos\theta+8\right)d\theta=2\left(12\cdot2\pi+\frac{32}{3}\left[\sin\theta\right]_0^{2\pi}\right)=$$

$$=\underline{\underline{48\pi}}.$$

8.8. Beräkna volymen av den kropp som begränsas av cylindrarna $x^2 = 4-4z$ och $y^2 = 4-4z$ samt xy-planet.

Lösning: Rita området D! (Lite klurigt!)





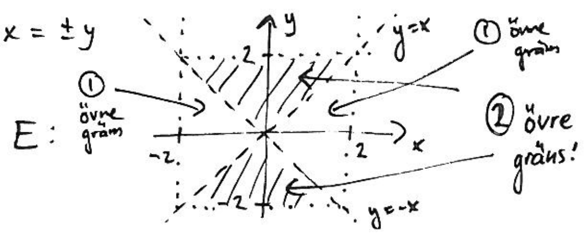
$x^2 = 4-4z \iff z = 1-\frac{x^2}{4}$ (1)

$y^2 = 4-4z \iff z = 1-\frac{y^2}{4}$ (2)

Skärning: $1-\frac{x^2}{4} = 1-\frac{y^2}{4} \iff x^2 = y^2$

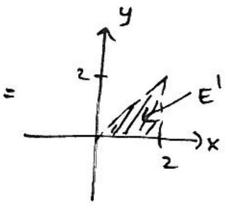
$\iff x = \pm y$

E:



Av symmetriskäl är

Volym $= 8\iint_{E'} \left(1-\frac{x^2}{4}\right) dx\,dy =$



$= 8\int_0^2 \left(\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\cdot\int_0^x 1\,dy\right)dx =$

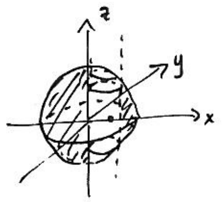
$= 8\int_0^2 \left(x-\frac{x^3}{4}\right)dx = 8\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{16}\right]_0^2 =$

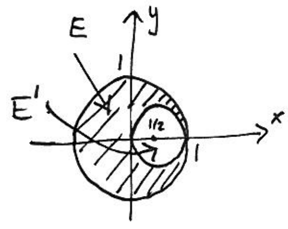
$= 8(2-1) = \underline{\underline{8}}$

8.42. Ur klotet $x^2+y^2+z^2 \le 1$ borras ett cylindriskt hål med radien 1/2. Cylinderns axel är parallell med z-axeln och går genom punkten $(\frac{1}{2},0,0)$. Beräkna volymen av den del av klotet som återstår.

Lösning:

D:





• Volym $= V_{hela} - V_{hål} = \frac{4\pi}{3}\cdot 1^3 - V_{hål}$

$V_{hål} = \iint_{E'} \left(\sqrt{1-(x^2+y^2)} - \left(-\sqrt{1-(x^2+y^2)}\right)\right) dx\,dy =$

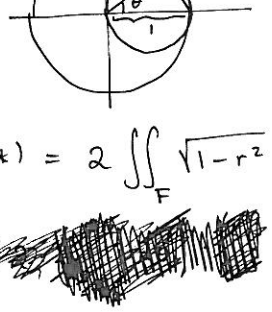
$= 2\iint_{E'} \sqrt{1-(x^2+y^2)}\, dx\,dy = (*)$

Byte till polära koord. med centrum i $(\frac{1}{2},0)$,

dvs. $\begin{cases} x = \frac{1}{2} + r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ ger för besvärliga

räkningar (integranden är "fel").

Vi kan faktiskt använda polära koord. med centrum i origo: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$



$F: \begin{cases} 0 \le r \le \cos\theta \\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$(*) = 2\iint_F \sqrt{1-r^2}\cdot r\,dr\,d\theta =$

$= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{3/2}\right]_0^{\cos\theta}\right) d\theta =$

$= \frac{2}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 - (\underbrace{1-\cos^2\theta}_{=\sin^2\theta})^{3/2}\right) d\theta =$

$= \frac{2}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 - |\sin\theta|^3\right) d\theta =$

$= \frac{2}{3}\int_{-\pi/2}^{0} \left(1+\sin^3\theta\right) d\theta + \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} \left(1-\sin^3\theta\right) d\theta =$

$= \frac{2}{3}\int_{-\pi/2}^{0} \left(1+\sin\theta(1-\cos^2\theta)\right) d\theta + \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} \left(1-\sin\theta(1-\cos^2\theta)\right) d\theta =$

$= \frac{2}{3}\left[\theta - \cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_{-\pi/2}^{0} + \frac{2}{3}\left[\theta + \cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi/2} =$

$= \frac{2}{3}\left(-1+\frac{1}{3}+\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2}-1+\frac{1}{3}\right) =$

$= \frac{2\pi}{3} - \frac{8}{9}$

$\Rightarrow$ Volym $= \frac{4\pi}{3} - \left(\frac{2\pi}{3}-\frac{8}{9}\right) = \frac{2\pi}{3} + \frac{8}{9}$

8.43. a) Verifiera att funktionen (9)

$$f(x,y) = y^2 + 4x^2 - x^4$$

har lokalt minimum i origo.

Lösning: $\begin{cases} f'_x = 8x - 4x^3 = 0 \\ f'_y = 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$

och $\begin{cases} f''_{xx} = 8 - 12x^2 \\ f''_{xy} = 0 \\ f''_{yy} = 2 \end{cases}$ ger $Q(h,k) = 8h^2 + 2k^2$

pos.def $\Rightarrow$ lok.min

b) Man börjar fylla i vatten i den "skål" som funktionsytan utgör nära origo. Till vilken höjd kan man fylla skålen?

Lösning: För ett fixt x så är $f(x,y)$ som minst då $y=0$. Vi studerar $g(x) = f(x,0) = 4x^2 - x^4$

$\Rightarrow g'(x) = 8x - 4x^3 = 0 \iff x = 0$ eller $x = \pm\sqrt{2}$

		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		$-$
$g(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$

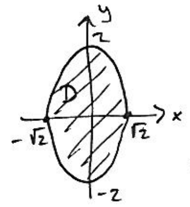
Vi kan fylla till höjden $g(\pm\sqrt{2}) = \underline{\underline{4}}$.

c) Hur mycket vatten rymmer skålen? (10)

Lösning: Sätt $f(x,y) = 4$. $y^2 + 4x^2 - x^4 = 4$

$\iff y^2 = x^4 - 4x^2 + 4 = (x^2-2)^2 \iff y = \pm(x^2-2)$

Område i xy-planet att integrera över:



$$\text{Volym} = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\int_{x^2-2}^{2-x^2} \left(4 - (y^2 + 4x^2 - x^4)\right) dy \right) dx$$

$$= 4 \cdot \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{2-x^2} \left((2-x^2)^2 - y^2 \right) dy \right) dx =$$

OBS! symmetri!

$$= 4 \int_0^{\sqrt{2}} \left[(2-x^2)^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_0^{2-x^2} dx =$$

$$= 4 \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2}{3} (2-x^2)^3 \, dx = \frac{8}{3} \int_0^{\sqrt{2}} (8 - 12x^2 + 6x^4 - x^6) \, dx =$$

$$= \frac{8}{3} \left[8x - 4x^3 + \frac{6}{5} x^5 - \frac{x^7}{7} \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{8}{3} \left(\cancel{8\sqrt{2}} - \cancel{8\sqrt{2}} + \frac{24}{5}\sqrt{2} - \frac{8}{7}\sqrt{2} \right) =$$

$$= \frac{8}{3} \cdot \frac{128}{35} \sqrt{2} = \frac{1024}{105} \sqrt{2}$$