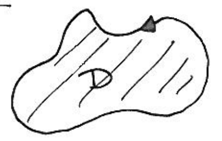
Föreläsning 21

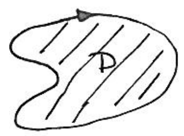
Greens formel:

Randen ∂D till ett område D i planet kan vi se som en (eller flera) kurvor. Vi ger nu ∂D en riktning och säger att ∂D är positivt orienterad om vi har D på vänster sida när vi genomlöper ∂D.

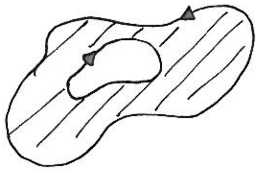
Ex:



positivt orienterad



negativt orienterad



positivt orienterad (trots att pilarna går åt "olika håll")

Det finns en sats (Greens formel) som knyter samman en dubbelintegral med en enkelintegral över randen:

Sats (Greens formel)

$P(x,y)$, $Q(x,y)$ funktioner

D kompakt område i planet

∂D positivt orienterad

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

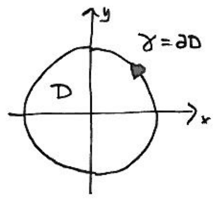
(Läs själv exakta förutsättningar, Sats 1, s. 335.)

Ex: Beräkna

$$I = \int_\gamma y\,dx - x\,dy,$$

där γ är den pos. orienterade enhetscirkeln.

Lösning: Direkt uträkning av $\int_\gamma$ ger, med parametriseringen



$$\gamma : \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}, \quad \theta : 0 \to 2\pi :$$

$$I = \int_0^{2\pi} \left(\sin\theta \cdot (-\sin\theta) - \cos\theta \cdot \cos\theta\right) d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} -\underbrace{(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}_{=1}\, d\theta = \underline{\underline{-2\pi}}$$

Med Greens formel får vi, då $P = y$, $Q = -x$

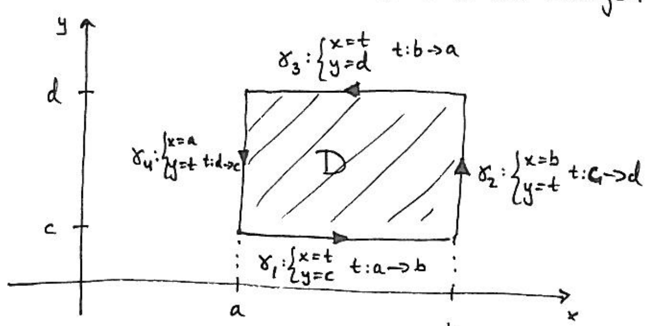
$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial D}{\partial y} = -1 - 1 = -2,$$

$$I = \iint_D -2\,dx\,dy = -2 \underbrace{\iint_D 1\,dx\,dy}_{= \text{area av enhetscirkeln} = \pi} = \underline{\underline{-2\pi}}$$

Stämmer! $\square$

Bevis av Greens formel:

Endast i det enklaste fallet då D är en rektangel:



$\partial D = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$. Vi får

- $$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \int_a^b \left(P(t,c) \cdot 1 + Q(t,c) \cdot 0\right) dt +$$

$$+ \int_c^d \left(P(b,t) \cdot 0 + Q(b,t) \cdot 1\right) dt + \int_b^a \left(P(t,d) \cdot 1 + Q(t,d) \cdot 0\right) dt +$$

$$+ \int_d^c \left(P(a,t) \cdot 0 + Q(a,t) \cdot 1\right) dt =$$

$$= \int_a^b \left(P(t,c) - P(t,d)\right) dt + \int_c^d \left(Q(b,t) - Q(a,t)\right) dt$$

- $$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\right) dy$$

$$- \int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\right) dx = \int_c^d \Big[Q(x,y)\Big]_a^b dy - \int_a^b \Big[P(x,y)\Big]_c^d dx =$$

$$= \int_c^d \left(Q(b,y) - Q(a,y)\right) dy - \int_a^b \left(P(x,d) - P(x,c)\right) dx =$$

byte i int. var

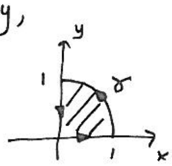
$$= \int_c^d \left(Q(b,t) - Q(a,t)\right) dt + \int_a^b \left(P(t,c) - P(t,d)\right) dt$$

dvs.

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

(5)

Ex: Beräkna
$$I = \int_\gamma (1+xy)\,dx - x^2\,dy,$$
där γ är den pos. or. randen till kvartscirkelskivan D.



Lösning: I stället för att parametrisera γ över tre kurvbitar verkar det enklare att använda Greens formel:
$$P = 1+xy\,,\quad Q = -x^2 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2x - x = -3x$$
$$D:\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} : E$$

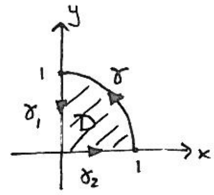
Vi får
$$I = \iint_D -3x\,dxdy = -3\iint_E r\cos\theta\, r\,dr\,d\theta =$$
$$= -3\left(\int_0^1 r^2\,dr\right)\cdot\left(\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta\right) = -3\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1\cdot\left[\sin\theta\right]_0^{\pi/2} =$$
$$= -3\cdot\frac{1}{3}\cdot 1 = \underline{\underline{-1}}$$
□

OBS! För att kunna använda Greens formel så måste vår kurva omsluta ett område, annars får vi "fixa till det":

(6)

Ex: Beräkna
$$I = \int_\gamma (1+xy)\,dx - x^2\,dy,$$
där γ är den pos. orienterade delen av enhetscirkeln från (1,0) till (0,1).

Lösning: γ bildar ingen sluten kurva (dvs. är ej rand till något område), men vi kan komplettera integrationsvägen med γ_1 o γ_2 enligt figur! Greens formel ger nu



$$(*)\ \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \underbrace{\int_\gamma P\,dx + Q\,dy}_{\text{söker vi}} + \underbrace{\int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy + \int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy}_{\text{måste beräknas}} =$$
$$= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \underline{-1} \quad \text{enl. förra Ex.}$$

$\gamma_1: \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases}$ $t: 1 \to 0$ ger $\int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy = \int_1^0 \underbrace{((1+0)\cdot 0 - 0^2\cdot 1)}_{=0}\,dt = \underline{0}$

$\gamma_2: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$ $t: 0 \to 1$ ger $\int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy = \int_0^1 ((1+0)\cdot 1 - t^2\cdot 0)\,dt = \int_0^1 1\,dt = \underline{1}$

Omskrivning av (*) ger $\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = -1 - 0 - 1 = \underline{\underline{-2}}$

(7)

- Låt D vara ett område, och studera nu den speciella integralen
$$\int_{\partial D} x\,dy,$$
dvs. $\begin{cases} P = 0 \\ Q = x \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - 0 = 1$

Greens formel ger: $\underline{\int_{\partial D} x\,dy} = \iint_D 1\,dxdy = \underline{\text{arean av } D}$

På motsv. sätt: $\underline{\int_{\partial D} -y\,dx} = \underline{\text{arean av } D}$

och $\underline{\frac{1}{2}\int_{\partial D} -y\,dx + x\,dy} = \underline{\text{arean av } D}$ (kolla!)

Ex: Beräkna arean av ellipsskivan D: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$

Lösn: Parametriseringen $\begin{cases} \frac{x}{a} = \cos\theta \\ \frac{y}{b} = \sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$ $\theta: 0 \to 2\pi$

ger en pos. orientering av skivans rand.

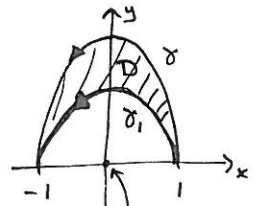
Vi får $\underline{\text{arean}} = \int_{\partial D} x\,dy = \int_0^{2\pi} (a\cos\theta\cdot b\cos\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi} ab\cos^2\theta\,d\theta =$
$$= ab\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2}\right)d\theta = ab\cdot\frac{1}{2}\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = ab\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi = \underline{\underline{\pi ab}}$$
□

- En kurvintegral som vi återkommer till nästa gång är:

(8)

Ex: Beräkna
$$I = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy, \quad \text{där} \begin{cases} P = -\frac{y}{x^2+y^2} \\ Q = \frac{x}{x^2+y^2} \end{cases}$$
och γ är övre halvan av ellipsen $4x^2 + y^2 \le 4$ från (1,0) till (−1,0).

Lösning: Integralen blir mycket ~~[illegible]~~ enklare att beräkna på delen γ_1 av enhetscirkeln.



farlig!

Eftersom
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{1\cdot(x^2+y^2) - 2x\cdot x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= -\frac{1\cdot(x^2+y^2) - 2y\cdot y}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

får vi
$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy \overset{\text{OBS!}}{-} \int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy = \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy =$$
$$= \iint_D 0\,dxdy = 0,$$
dvs.
$$\underline{I} = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy = \left[\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases} \theta: 0 \to \pi\right] =$$
$$= \int_0^\pi \left(\underbrace{\frac{-\sin\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}}_{=1}(-\sin\theta) + \underbrace{\frac{\cos\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}}_{=1}\cdot\cos\theta\right)d\theta = \int_0^\pi \underbrace{(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}_{=1}\,d\theta$$
$$= \underline{\pi}$$
□