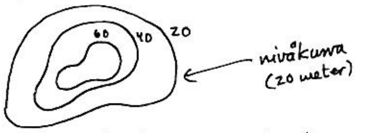
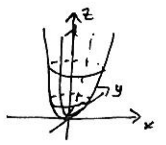
Föreläsning 2

Nivåkurvor: Tänk på en karta över ett terrängavsnitt:



Nivåkurvorna gör att vi får en bra tvådimensionell bild av hur terrängen (ytan) i tre dimensioner ser ut.

Ex: Vi återvänder till funktionen



$$z = f(x,y) = x^2+y^2.$$

Grafen till denna är som bekant en yta.

Vi vill nu beskriva denna yta med hjälp av nivåkurvor: $f(x,y) = C$ ⟵ "höjden"

$\underline{C=0}$: $f(x,y)=0 \iff x^2+y^2=0 \iff$ punkten $(0,0)$

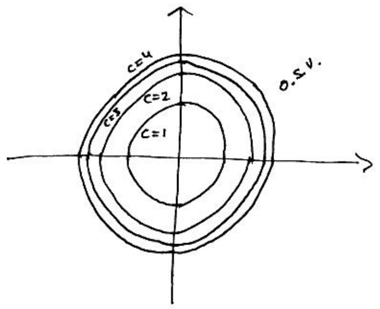
$\underline{C=1}$: $f(x,y)=1 \iff x^2+y^2=1$ cirkel med radie 1

$\underline{C=2}$: $f(x,y)=2 \iff x^2+y^2=2$ cirkel med radie $\sqrt{2}$

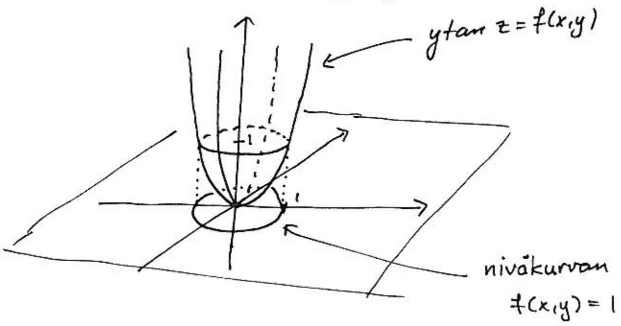
$\underline{C=3}$: $f(x,y)=3 \iff x^2+y^2=3$ cirkel med radie $\sqrt{3}$

$\underline{C=4}$: cirkel med radie 2, o.s.v.

För ytan $z=x^2+y^2$ får vi därför följande "karta"



Verkar rimligt att denna beskriver "skålen" (paraboloiden) från förra gången:



Ex: Rita nivåkurvor till

$$z = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Lösning: Nivåkurvor $f(x,y) = C$.

$\underline{C=0}$: $f(x,y)=0 \iff \sqrt{x^2+y^2}=0 \iff$ punkten $(0,0)$

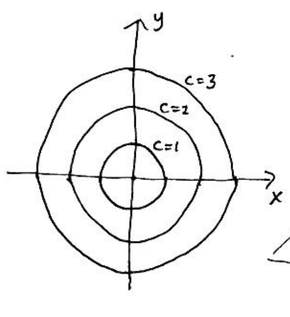
$\underline{C=1}$: $f(x,y)=1 \iff \sqrt{x^2+y^2}=1 \iff x^2+y^2=1$ cirkel med radie 1

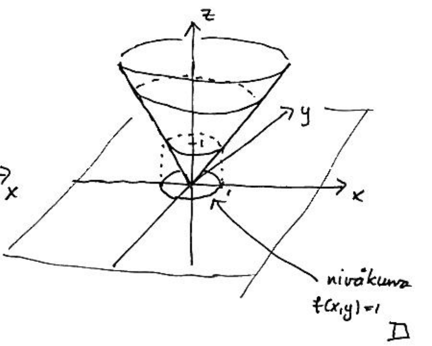
$\underline{C=2}$: $f(x,y)=2 \iff \sqrt{x^2+y^2}=2 \iff x^2+y^2=4$ cirkel med radie 2

$\underline{C=3}$: $f(x,y)=3 \iff \sqrt{x^2+y^2}=3 \iff x^2+y^2=9$ cirkel med radie 3

$\underline{C=4}$: cirkel med radie 4, o.s.v.

Nu ligger nivåkurvorna lika långt från varandra, så $z=\sqrt{x^2+y^2}$ är en kon:



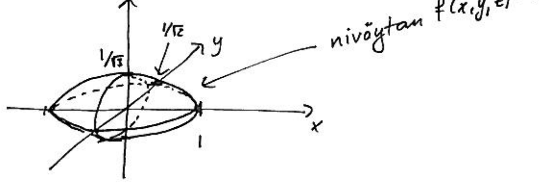


□

Vi kan inte rita grafen till en funktion $u=f(x,y,z)$ $(f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R})$. Då krävs fyra rumsdimensioner. Däremot kan vi rita dess nivåytor och på så sätt få en uppfattning om grafen

Nivåytor: $f(x,y,z) = C$ ⟵ "höjden"

Ex: För $f(x,y,z) = x^2+2y^2+3z^2$ blir nivåytorna ellipsoider:



Ex: Om $T(x,y,z)$ är temperaturen i punkten (x,y,z) så blir en nivåyta alla punkter med en viss temperatur (t.ex. ett "skal" kring brandhärden.

En funktion $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ kallas vektorvärd om $p>1$ ($p=1$ reellvärd). I tidigare kurser:

- Linjära avbildningar (mest. $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$)
- Kurvor (på parameterform), t.ex. i planet $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$.

(5)

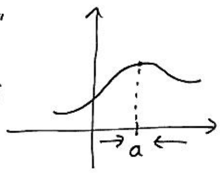
Gränsvärden:

"Samma" definition som i envariabelfallet, se Definition 5 på s. 34. Med andra ord

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

betyder att vi kan få $f(x)$ <u>godtyckligt nära</u> b bara x är <u>tillräckligt nära</u> a.

Envariabelfallet är relativt "enkelt" att studera. Vi kan bara närma oss punkten a från två olika håll.



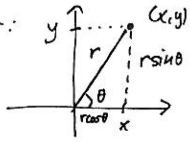
Flervariabelfallet är värre. Vi måste då kolla <u>alla möjliga sätt</u> att närma sig punkten a.

<u>Ex:</u> Beräkna $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ där

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}.$$

<u>Lösning:</u> Ett alternativt sätt att uttrycka en punkt (x,y) i planet är <u>polära koordinater</u>:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}.$$



(6)

Att $(x,y) \to (0,0)$ är då samma sak som att säga att $r \to 0$ (tänk efter!). Vi får

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \frac{r\cos\theta\,(r\sin\theta)^2}{r^2} =$$

$$= r\cos\theta\sin^2\theta$$

$$\Rightarrow 0 \le |f(x,y)| = r|\cos\theta|\sin^2\theta \le r\cdot 1\cdot 1 = r \to 0$$

då $r \to 0$, dvs. då $(x,y)\to(0,0)$.

Alltså följer att $f(x,y) \to \underline{0}$ (m.h.a instängning) <u>oberoende</u> av θ, dvs. oberoende av hur vi närmar oss $(0,0)$.

<u>Ex:</u> Beräkna $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x)$ där

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

<u>Lösning:</u> $f(x,y) = \dfrac{r\cos\theta\, r\sin\theta}{r^2} = \cos\theta\sin\theta = \begin{cases} 0 & \text{om } \theta = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{om } \theta = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

Olika "vägar" till origo ger alltså olika värde, så <u>gränsvärdet existerar ej</u>. ($\theta = 0$ motsvarar vägen $y = 0$, och $\theta = \frac{\pi}{4}$ vägen $y = x$). Försök även att förstå Exempel 26 (studera särskilt grafen).

(7)

Definition 6 sid. 39 behandlar gränsvärden då $|(x,y)| \to \infty$ (då vi rör oss långt bort från origo).

<u>Ex:</u> Beräkna $\lim_{|(x,y)|\to\infty} f(x,y)$ där

$$f(x,y) = (x-2y)e^{-(x^2+y^2)}.$$

<u>Lösning:</u> I polära koordinater har vi

$$f(x,y) = (r\cos\theta - 2r\sin\theta)e^{-r^2}.$$

Notera att $|(x,y)| \to \infty \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} \to \infty$

$$\Leftrightarrow r \to \infty.$$

Instängning ger nu att $f(x,y) \to 0$, eftersom

$$0 \le |f(x,y)| = |(r\cos\theta - 2r\sin\theta)e^{-r^2}| =$$

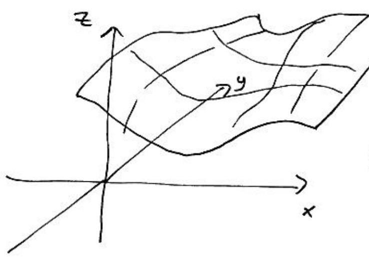
$$= re^{-r^2}|\cos\theta - 2\sin\theta| \le re^{-r^2}\cdot 3 = 3\frac{r}{e^{r^2}} \to 0$$

då $r \to \infty$, dvs. då $|(x,y)| \to \infty$. $\square$

<u>Kontinuitet:</u> Definitionen är "samma" som i envariabelfallet (se Definition 7)

(8)

Geometrisk tolkning av en kontinuerlig funktion: grafen är sammanhängande utan plötsliga "språng" (om grafen kan ritas dvs.)



f kontinuerlig

$z = f(x,y)$

ytan har inga "språng".

Alla uttryck i elementära funktioner visar sig vara kontinuerliga (där de är ofarliga, t.ex. nämnare $\neq 0$). Exempelvis är

$$f(x,y) = \frac{(x^2+y^2)\cos(xy-3)}{xy+1}$$

kontinuerlig i hela $\mathbb{R}^2$.

Jämför <u>satser om kontinuerliga funktioner</u>, s. 41-42, med envariabelfallet. Kolla att de verkar rimliga!