Föreläsning 19

Kap. 8 Volymberäkningar

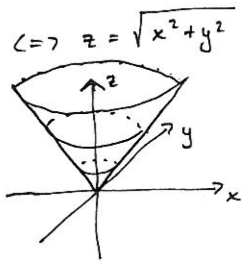
Ex: Beräkna volymen av den kropp K som begränsas av ytorna $x^2+y^2-z^2$, $z \geq 0$

och $z = 2 - x^2 - y^2$.

Lösning: Vi måste försöka rita kroppen!

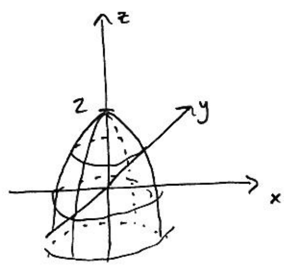
yta 1: $x^2+y^2-z^2=0,\ z\geq 0 \iff z=\sqrt{x^2+y^2}$

Sätt $y=0$: $z=\sqrt{x^2}=|x|$.
Roterar vi denna kurva kring z-axeln får vi en kon.



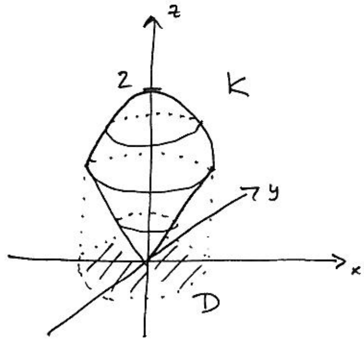
yta 2: Också denna är rotationssymmetrisk kring z-axeln

Sätt $y=0$: $z=2-x^2$. Rotation av denna parabel ger en upp-och-nervänd paraboloid ("skål").



Kombinerar vi dessa får vi kroppen K:

En "glasstrut"!



Övre ytan är

$z = 2-(x^2+y^2)$,

och den undre är

$z=\sqrt{x^2+y^2}$,

dvs.

$$\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2-(x^2+y^2)$$

Vi bestämmer nu vilket område i xy-planet som vi ska integrera över:

$$\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z=2-(x^2+y^2) \end{cases} \Rightarrow z = 2-z^2$$

$$\iff z^2+z-2=0 \iff \begin{cases} z=1 \\ \text{eller} \\ (z=-2) \end{cases} \quad (\text{OBS! } z\geq 0)$$

Området D i xy-planet är en cirkelskiva med radie 1; $z=\sqrt{x^2+y^2}=1 \iff \underline{x^2+y^2=1}$!

Nu beräknar vi volymen:

$$V = \iiint_K 1\,dxdydz = \iint_D \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2-(x^2+y^2)} 1\,dz \right) dxdy =$$

$$= \iint_D \Big[z \Big]_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2-(x^2+y^2)} dxdy = \iint_D \left(2-(x^2+y^2)-\sqrt{x^2+y^2}\right) dxdy =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} \text{pol. koord.} & 0\leq r\leq 1 \\ \begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}, & 0\leq\theta\leq 2\pi \end{array} \right] = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (2-r^2-r)\cdot r\,dr \right) d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (2r-r^3-r^2)\,dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left[r^2-\frac{r^4}{4}-\frac{r^3}{3} \right]_0^1 d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{5}{12}\,d\theta = 2\pi\cdot\frac{5}{12} = \underline{\underline{\frac{5}{6}\pi}}$$

OBS! Svaret är positivt (annars har vi gjort fel).

Allmänt: En kropp som ges av

$$f(x,y) \leq z \leq g(x,y), \qquad (x,y)\in D$$

har volymen $$V = \iint_D \left(g(x,y)-f(x,y)\right) dxdy.$$