Föreläsning 17

(1)

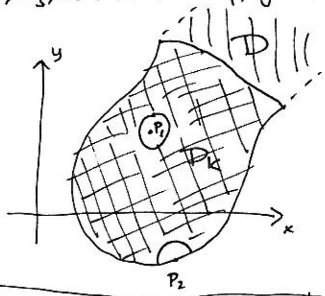
Generaliserade integraler: $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

Hittills: Både området D och integranden $f(x,y)$ begränsade.

Nu: D eller $f(x,y)$ obegränsad: Generaliserad integral.

Man definierar en generaliserad integral på följande sätt: Antag att D är obegränsad och att även $f(x,y)$ obegränsad nära (t.ex.) punkterna P_1 och P_2. Vi bildar en svit av mängder $D_1, D_2, D_3, \ldots\ldots$ som uppfyller:

- alla D_k begränsade
- f begränsad i alla D_k
- $D_k \nearrow D$ då $k \to \infty$, dvs. sviten "växer ut mot D".



Def: Om $I = \lim_{k\to\infty} \iint_{D_k} f(x,y)\,dx\,dy$ existerar (ändligt) så säger vi att $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ är konvergent med värdet I.

(2)

OBS! Vi kräver att $f(x,y) \geq 0$ i D annars kan märkligheter uppstå (jmfr. Ex. 19 s. 272-273.)

Hur beräknar man en gen. integral?

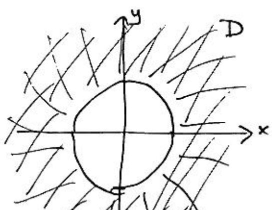
Om $f(x,y) \geq 0$ så kan vi räkna "som vanligt". Ett ändligt resultat betyder att integralen är konvergent, annars divergent.

Ex: Beräkna

$$I = \iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy, \quad D: x^2+y^2 \geq 1.$$

obegr. område!

Lösning: Sätt $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$



$\Rightarrow E: r \geq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\Rightarrow I = \iint_E \frac{1}{(r^2)^2}\cdot r\,dr\,d\theta =$$

$$= \iint_E \frac{1}{r^3}\,dr\,d\theta = \left(\int_1^\infty r^{-3}\,dr\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi} 1\,d\theta\right) =$$

(3)

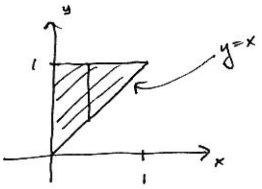
$$= \lim_{R\to\infty}\left[\frac{r^{-2}}{-2}\right]_1^R \cdot \left[\theta\right]_0^{2\pi} = \left(0 - \left(-\tfrac{1}{2}\right)\right)\cdot 2\pi = \underline{\underline{\pi}}$$

Ex: Beräkna

$$I = \iint_D \frac{1}{\sqrt{y-x}}\,dx\,dy,$$

där $D: x < y \leq 1,\ x \geq 0.$

Lösning: Rita området!



Generaliserad integral eftersom $\frac{1}{\sqrt{y-x}}$ obegr. på linjen $y=x$.

$$I = \int_0^1 \left(\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{y-x}}\,dy\right)dx = \int_0^1 \left[2\sqrt{y-x}\right]_x^1 dx =$$

$$= \int_0^1 2\sqrt{1-x}\,dx = 2\left[-\tfrac{2}{3}(1-x)^{3/2}\right]_0^1 = -\tfrac{4}{3}(0-1) = \underline{\underline{\tfrac{4}{3}}}.$$

Anm: Egentligen $I = \int_0^1 \left(\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{x+\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{y-x}}\,dy\right)dx =$

$= \ldots\ldots$ (Resultatet blir samma. Kolla!)

Ex: Beräkna

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \quad !$$

(4)

Lösning: Det finns ingen elementär primitiv till e^{-x^2}, men vi kan utnyttja en dubbelintegral på ett tiffigt sätt för att beräkna I:

OBS! ger samma resultat.

$$I^2 = I\cdot I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy =$$

som vanligt "baklänges"

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}\,dx\,dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = J.$$

Polära koordinater $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ gör att $\mathbb{R}^2$ övergår i $E: \begin{cases} 0 \leq r < \infty \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$, så

$$I^2 = J = \iint_E e^{-r^2}\cdot r\,dr\,d\theta = \left(\int_0^\infty r e^{-r^2}\,dr\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi} 1\,d\theta\right) =$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left[\frac{e^{-r^2}}{-2}\right]_0^R \cdot \left[\theta\right]_0^{2\pi} = \left(0 - \left(-\tfrac{1}{2}\right)\right)\cdot 2\pi = \underline{\pi}$$

$$\Rightarrow I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi} \quad (\text{ty } I \text{ positiv})$$

Precis som i envariabelanalys har vi ett antal jämförelsesatser (s.279): ⑤

Om $0 \le f(x,y) \le g(x,y)$ i D så gäller

- $\iint_D g(x,y)\,dxdy$ konv. $\Rightarrow$ $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ konv.

- $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ div. $\Rightarrow$ $\iint_D g(x,y)\,dxdy$ div.

Ex: Visa att

$$I = \iint_D \frac{\arctan^2(xy)}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy, \quad D: x^2+y^2 \geq 1,$$

är konvergent.

Lösning: $-\frac{\pi}{2} < \arctan(xy) < \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow$

$$0 \le \arctan^2(xy) < \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4} \quad \Rightarrow$$

$$0 \le \frac{\arctan^2(xy)}{(x^2+y^2)^2} < \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{och} \quad \iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy$$

är konvergent enligt tidigare exempel

$\Rightarrow$ I konvergent.