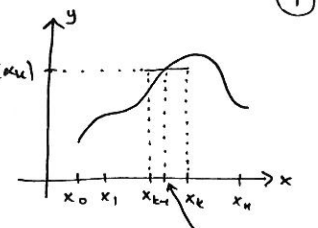
Föreläsning 16

(1)

Riemannsummor

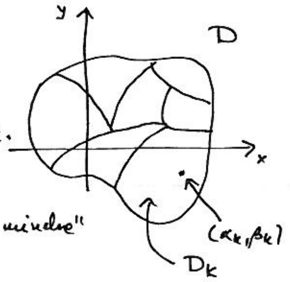


I envariabelanalys definierade vi Riemannsumman $\sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)(x_k - x_{k-1})$

För $f(x,y)$ definierad på D får vi i stället

$$\sum_{D_k \subseteq D} f(\alpha_k,\beta_k)\,\mu(D_k),$$

där $\mu(D_k)$ är arean av D_k.



Om f är kontinuerlig och områdena D_k blir "mindre och mindre" så får vi

$$\sum_{D_k \subseteq D} f(\alpha_k,\beta_k)\,\mu(D_k) \longrightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

(dvs. integral = "∞ summa av ∞ små delar")

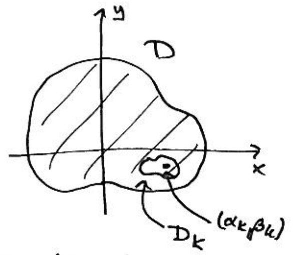
Samma sak gällde i endimfallet.

(2)

Ex: Plattan D har variabel ytdensitet $\rho(x,y)$ (kg/m^2). Vad är den totala massan av D?

Lösning: Om densiteten vore konstant så skulle

massan = ytdensiteten · arean
(kg) (kg/m^2) (m^2)



På en liten del D_k av plattan kan vi anta att $\rho(x,y)$ är konstant $= \rho(\alpha_k,\beta_k)$ för någon punkt (α_k,β_k) i D_k. Vi får

massan av $D_k \approx \rho(\alpha_k,\beta_k)\,\mu(D_k)$

$\Rightarrow$ total massa $\approx \sum_{D_k \subseteq D} \rho(\alpha_k,\beta_k)\,\mu(D_k)$ Riemannsumma!

"Oändligt små" områden D_k ger nu

$$\boxed{\text{massan} = \iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy}$$

(Man brukar kalla massan av en "oändligt liten" bit för dm: $m = \int_D dm = \iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy$)

(3)

Variabelbyte:

I envariabelanalys gällde, för ett byte $x=2t$, att

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(2t)\cdot 2\,dt, \text{ eftersom } \frac{dx}{dt} = 2 \Rightarrow dx = 2dt.$$

Intervallet $I: -2 \le x \le 2$ ändras till intervallet $J: -1 \le t \le 1$. Om i stället $x=-2t$ så får vi återigen $J: -1 \le t \le 1$:

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{1}^{-1} f(-2t)\cdot(-2)\,dt = \int_{-1}^{1} f(-2t)\cdot 2\,dt,$$

och eftersom $\frac{dx}{dt} = -2$ måste formeln bli

$$\int_I f(x)\,dx = \int_J f(x(t)) \left|\frac{dx}{dt}\right| dt$$

abs. belopp!

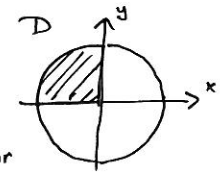
Faktorn $\frac{dx}{dt}$ anger (med tecken) hur intervallet I ändras till intervallet J. Vi har tidigare sett att funktionaldeterminanten $\frac{d(x,y)}{d(u,v)}$ anger hur en area i xy-planet förhåller sig storleksmässigt till en area i uv-planet då

(4)

$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$. Det verkar rimligt att vi för variabelbyten i dubbelintegraler får Sats 6 (s.261), dvs. multiplicera med determinanten vid variabelbyte!

Ex: Beräkna $I = \iint_D x^2 y\,dx\,dy$, där

$$D: \begin{cases} x^2+y^2 \le 1 \\ x \le 0,\ y \ge 0 \end{cases}$$

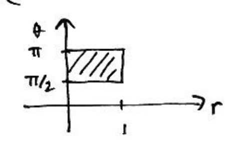


Lösning: Rita området D!

Eftersom det är en cirkelsektor provar vi att byta till polära koordinater.

Med $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ svarar området D i xy-planet mot området $E: \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ \frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi \end{cases}$ i $r\theta$-planet.

En rektangel! (Mycket lättare)



Vi beräknar funktionaldeterminanten:

$$\frac{d(x,y)}{d(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r.$$

Vi får nu

OBS! $|r| = r$

$$I = \iint_D x^2 y \, dx dy = \iint_E (r\cos\theta)^2 \cdot r\sin\theta \cdot \left|\frac{d(x,y)}{d(r,\theta)}\right| dr d\theta =$$

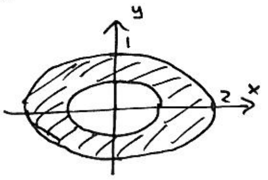
Jmfr. förra föreläsn.

$$= \iint_E r^4 \cos^2\theta \sin\theta \, dr d\theta = \int_0^1 r^4 dr \cdot \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta =$$

$$= \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1 \cdot \left[-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3} + 0\right) = \frac{1}{15}$$

Ex: Beräkna $I = \iint_D x^2 \, dx dy$, $D: 1 \le x^2 + 4y^2 \le 4$.

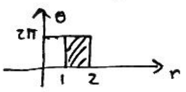
Lösning: Området D är en "ellipsring". Vi modifierar våra polära koordinater lite:



$$1 \le x^2 + (2y)^2 \le 2^2 \Rightarrow \begin{cases} x = r\cos\theta \\ 2y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = \frac{1}{2} r \sin\theta \end{cases} \quad \text{ger } E: 1 \le r \le 2, \; 0 \le \theta \le 2\pi$$

Rektangel!



$$\frac{d(x,y)}{d(r,\theta)} = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\theta \\ y'_r & y'_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \frac{1}{2}\sin\theta & \frac{1}{2} r\cos\theta \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} r\cos^2\theta + \frac{1}{2} r \sin^2\theta = \frac{1}{2} r$$

$$\Rightarrow I = \iint_E (r\cos\theta)^2 \cdot \frac{1}{2} r \, dr d\theta = \frac{1}{2}\int_1^2 r^3 dr \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta =$$

$$= \left[\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right] = \frac{1}{2}\int_1^2 r^3 dr \cdot \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2}\right) d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_1^2 \cdot \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left(\frac{16}{4} - \frac{1}{4}\right) \cdot (\pi + 0 - 0) =$$

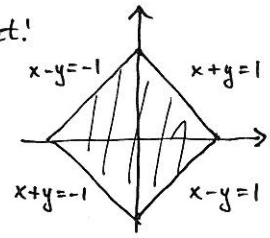
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{4} \cdot \pi = \frac{15\pi}{8}.$$

Ex: Beräkna $I = \iint_D \frac{(x+y)^2}{1+(x-y)^2} \, dx dy$, där

D är kvadraten med hörn i $(1,0), (0,1), (-1,0)$ & $(0,-1)$.

Lösning: Vi ritar området!

Både integralen och området ger tips om att vi gör följande byte:



$$\begin{cases} x + y = u \\ x - y = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(u+v) \\ y = \frac{1}{2}(u-v) \end{cases}$$

Eftersom D kan skrivas $\begin{cases} -1 \le x+y \le 1 \\ -1 \le x-y \le 1 \end{cases}$ får

vi då $E: \begin{cases} -1 \le u \le 1 \\ -1 \le v \le 1 \end{cases}$ Rektangel!

$$\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow I = \iint_E \frac{u^2}{1+v^2} \cdot \frac{1}{2} \, du dv = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{1} u^2 du \cdot \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+v^2} dv =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{u^3}{3}\right]_{-1}^{1} \cdot \left[\arctan v\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right)(\arctan 1 - \arctan(-1)) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}.$$