Föreläsning 14

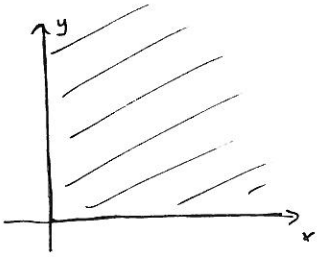
4.19. Bestäm största och minsta värde av

$$f(x,y) = (x^2+y)e^{-x-y}$$

i området $0 \le x < \infty$, $0 \le y < \infty$.

Lösning:

Icke-kompakt område.
f_{max} och f_{min} behöver ej finnas!



Stat. punkter:

$$\begin{cases} f'_x = 2x\cancel{e^{-x-y}} + (x^2+y)\cdot(-1)\cdot \cancel{e^{-x-y}} = 0 \\ f'_y = 1\cdot \cancel{e^{-x-y}} + (x^2+y)\cdot(-1)\cdot\cancel{e^{-x-y}} = 0 \end{cases} \quad (e^{-x-y} \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y = 2x & (1) \\ x^2+y = 1 & (2) \end{cases}$$

(1), (2) ger $2x = 1$
$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$
Insättning i (2) ger
$y = 1 - x^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

stat. punkt $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$
och $f\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)e^{-5/4} = e^{-5/4}$

Vad händer på randen?

$\underline{y=0}$: $\quad g(x) = f(x,0) = x^2e^{-x}, \quad x \ge 0$

$\Rightarrow g'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = 0$

$\Leftrightarrow xe^{-x}(2-x) = 0 \Leftrightarrow x=0$ eller $x=2$

Intressanta punkter $(2,0)$ och $(0,0)$ ← "hörn"

$f(2,0) = 4e^{-2}, \quad f(0,0) = 0$

$\underline{x=0}$: $\quad h(y) = f(0,y) = ye^{-y}, \quad y \ge 0$

$\Rightarrow h'(y) = 1\cdot e^{-y} - ye^{-y} = 0$

$\Leftrightarrow e^{-y}(1-y) = 0 \Leftrightarrow y = 1$

Intressant punkt $(0,1)$, $f(0,1) = e^{-1}$

Eftersom $f(x,y) \ge 0$ i vårt område, så är $f_{min} = 0$ (i punkten $(0,0)$).

Av de övriga värdena är $4e^{-2}$ störst
(OBS! $4e^{-2} = \frac{4}{e}\cdot\frac{1}{e} > 1\cdot\frac{1}{e} = e^{-1}$)

Vad händer då $r = x^2+y^2 \to \infty$?

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \text{ ger } f(x,y) = (r^2\cos^2\theta + r\sin\theta)e^{-r(\cos\theta+\sin\theta)}$$

$$0 \le |f(x,y)| = \frac{|r^2\cos^2\theta + r\sin\theta|}{e^{r(\cos\theta+\sin\theta)}} \le$$

$$\le \frac{r^2\overbrace{|\cos^2\theta|}^{\le 1} + r\overbrace{|\sin\theta|}^{\le 1}}{e^{r(\cos\theta+\sin\theta)}} \le \frac{r^2+r}{e^{r(\cos\theta+\sin\theta)}} \overset{*)}{=}$$

$$= \frac{r^2+r}{e^{r\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})}} \overset{**)}{\le} \frac{r^2+r}{e^r} \to 0 \text{ då } r \to \infty$$
(oberoende av θ)

*) hjälpvinkelmetoden

$$\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\left(\underbrace{\tfrac{1}{\sqrt{2}}}_{\text{"}\sin\pi/4\text{"}}\cos\theta + \underbrace{\tfrac{1}{\sqrt{2}}}_{\text{"}\cos\pi/4\text{"}}\sin\theta\right) =$$

$$= \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

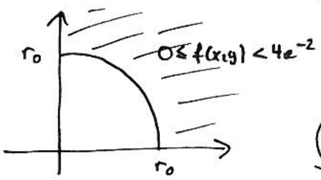
**) Då $0 \le \theta \le \pi/2$ så är $\frac{1}{\sqrt{2}} \le \sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) \le 1$

(kolla!) $\Rightarrow 1 \le \sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}$

Slutsatsen är att $f(x,y) \to 0$ då $x^2+y^2 \to \infty$ och $\underline{x \ge 0, y \ge 0}$ OBS!

Alltså finns det ett tal r_0 sådant att

$0 \le f(x,y) < 4e^{-2}$ för alla punkter (x,y) med $x^2+y^2 \ge r_0$, $x,y \ge 0$



Slutsats:

$$f_{min} = 0, \quad f_{max} = 4e^{-2}$$

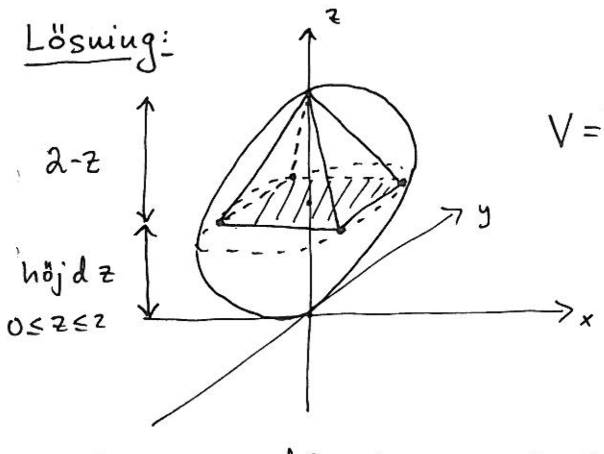
= svaret

4.34. I ellipsoiden

$$x^2 + \frac{y^2}{4} + (z-1)^2 = 1$$

är en pyramid inskriven. Pyramidens topp ligger i $(0,0,2)$. Bottenytan är en rektangel som är parallell med xy-planet. Bestäm den största volym en sådan pyramid kan ha.

Lösning:

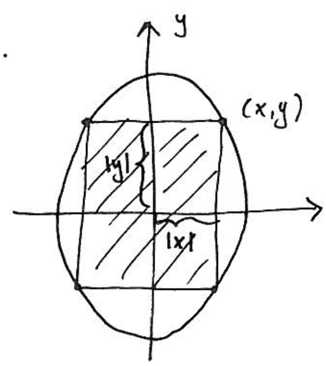


$$V = \frac{B\cdot h}{3}$$

Bottenytan får vi genom att skära med planet på höjd z, $0 \le z \le 2$.

5

Välj ett hörn (x,y).



Volymen av pyramiden blir

$$\frac{4|x||y|(2-z)}{3} = \left|\frac{4xy(2-z)}{3}\right|$$

Vi optimerar funktionen

$$f(x,y,z) = \frac{4xy(2-z)}{3}$$

med bivillkoret $g(x,y,z) = x^2 + \frac{y^2}{4} + (z-1)^2 = 1$.

Bivillkoret ger en kompakt mängd (ellipsoiden) så f_{max} & f_{min} existerar. "Rand" saknas.

Kollar när grad f // grad g:

$$\text{grad } f = \left(\frac{4y(2-z)}{3}, \frac{4x(2-z)}{3}, -\frac{4xy}{3}\right)$$

$$\text{grad } g = \left(2x, \frac{y}{2}, 2(z-1)\right)$$

"Farliga" punkter där grad f eller grad $g = \bar{0}$ 6

och som ligger på ellipsoiden är

$(0,0,0)$ och $(0,0,2)$

$$f(0,0,0) = f(0,0,2) = 0$$

$$\begin{array}{l} \cdot x \\ \cdot y \\ \cdot(-(2-z)) \end{array} \left\{ \begin{aligned} \frac{4y(2-z)}{3} &= \lambda \cdot 2x \\ \frac{4x(2-z)}{3} &= \lambda \cdot \frac{y}{2} \\ -\frac{4xy}{3} &= \lambda \cdot 2(z-1) \end{aligned} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{4xy(2-z)}{3} &= \lambda \cdot 2x^2 & (1) \\ \frac{4xy(2-z)}{3} &= \lambda \cdot \frac{y^2}{2} & (2) \\ \frac{4xy(2-z)}{3} &= \lambda \cdot 2(z-2)(z-1) & (3) \end{aligned} \right.$$

(1), (2), (3) ger $\lambda \cdot 2x^2 = \lambda \cdot \frac{y^2}{2} = \lambda \cdot 2(z-2)(z-1)$

$\lambda \neq 0 \Rightarrow \quad x^2 = \frac{y^2}{4} = (z-2)(z-1) = z^2 - 3z + 2$

Insättning i $g(x,y,z) = 1$ ger

$$z^2 - 3z + 2 + z^2 - 3z + 2 + (z-1)^2 = 1$$

7

$$\Leftrightarrow 3z^2 - 8z + 4 = 0 \Leftrightarrow z^2 - \frac{8}{3}z + \frac{4}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9} - \frac{12}{9}} = \frac{4 \pm 2}{3}$$

$$\Leftrightarrow (z = 2) \text{ eller } z = \frac{2}{3}$$

$$z = \frac{2}{3} \Rightarrow z^2 - 3z + 2 = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} x^2 &= \frac{4}{9} \\ y^2 &= \frac{16}{9} \end{aligned} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} x &= \pm\frac{2}{3} \\ y &= \pm\frac{4}{3} \end{aligned} \right.$$

Intressanta punkter är

$$\left(\pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$f\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \left(2 - \frac{2}{3}\right)}{3} = \frac{128}{81}$$

Svar: Största volym $\frac{128}{81}$.