Föreläsning 13

(1)

Optimering med bivillkor:

Optimering som tidigare, men nu ska vi även ta hänsyn till bivillkor.

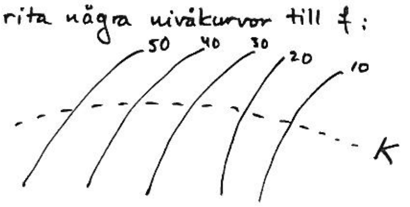
Ex: Bestäm största o minsta avstånd från kurvan $x^3+y^3=1$, $x\geq 0, y\geq 0$ till origo, dvs. studera funktionen $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ i alla punkter som uppfyller $x^3+y^3=1$, $x\geq 0, y\geq 0$ (bivillkoret).

- Vi studerar först ett allmänt sådant problem

funktion $f(x,y)$ bivillkor $g(x,y)=C$

Bivillkoret definierar en kurva K i xy-planet. Låt oss rita några nivåkurvor till f:

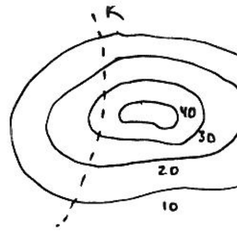
I)



Här finns inget största värde då vi går högre och högre "uppför berget".

(2)

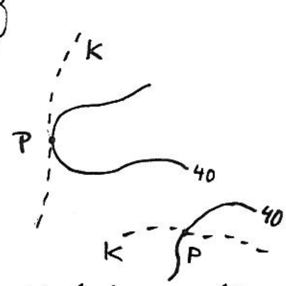
II) Här finns största värde eftersom vi går "uppåt" och sedan "nedåt"



III) Här finns största värde; vi "stannar" på vägen upp.

Fall III visar att vi är intresserade av bivillkorets randpunkter, och vi måste även undersöka ev randpunkter till D_f.

Vad händer i fall II ?



Om största värdet antas i P så verkar det rimligt att K tangerar nivåkurvan till f i P, annars skulle det fortfarande "luta uppåt" och vi hade kunnat få ett större värde. Slutsats: normalen till K : $g(x,y)=C$ och normalen till $f(x,y)=C'$ är parallella! Detta kan vi uttrycka som att

(3)

$$\boxed{\text{grad } f \text{ och grad } g \text{ är parallella i P.}}$$

(Se Sats 1, s.173; Bevis s. 172-173)

Att $\text{grad } f=(f'_x,f'_y)\ //\ \text{grad } g=(g'_x,g'_y)$ innebär att

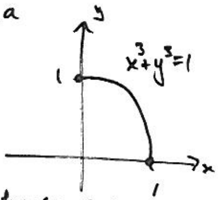
$$\begin{cases} f'_x=\lambda g'_x \\ f'_y=\lambda g'_y \end{cases} \quad (\text{om grad } g\neq \bar{0})$$

Lagranges multiplikatormetod

eller $\begin{vmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{vmatrix}=0$ (linj. algebra)

Ex (forts.): Optimera $f(x,y)=x^2+y^2$ (går lika bra!) då $x^3+y^3=1$, $x\geq 0, y\geq 0$.

Lösn.: Vi skall kolla randpunkterna (1,0) och (0,1): $f(1,0)=f(0,1)=1$,



samt de punkter där

grad f // grad g $\iff$ (grad $f=(2x,2y)$, grad $g=(3x^2,3y^2)$)

$$\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 3x^2 & 3y^2 \end{vmatrix}=0 \iff 6xy^2-6x^2y=0$$

Tillsammans med bivillkoret får vi

(4)

$$\begin{cases} 6xy^2-6x^2y=0 & (1) \\ x^3+y^3=1 & (2) \end{cases}$$

(1) $\iff xy^2=x^2y \iff y=x$ (vi kan anta att $x\neq 0, y\neq 0$)

$\Rightarrow$ (2) $\iff x^3+x^3=1 \iff 2x^3=1 \iff x=\frac{1}{2^{1/3}}=2^{-1/3}$

och vi får $f(2^{-1/3},2^{-1/3})=(2^{-1/3})^2+(2^{-1/3})^2=$

$$=2\cdot 2^{-2/3}=2^{1/3}$$

Jämförelse ger $f_{max}=2^{1/3}$

$f_{min}=1$.

OBS! I ursprungsuppgiften skulle vi optimera $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ med samma bivillkor. Största avstånd är då $\sqrt{2^{1/3}}=\underline{\underline{2^{1/6}}}$ och minsta avstånd $\sqrt{1}=\underline{\underline{1}}$.

Anm: I exemplet var snittet av D_f och kurvan $g(x,y)=C$ kompakt så vi vet att största o minsta värde existerar!

Ex: Optimera

$$f(x,y) = x^2 + x(y^2-1)$$

under bivillkoret $x^2+y^2=1$.

Lösning: Gjorde vi förra gången (uppg. 4.11) genom att parametrisera cirkeln $(x(t),y(t)) = (\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$. Här fungerar alltså en annan (enklare) metod.

- Samma metoder fungerar för $f(x,y,z)$ och bivillkor $g(x,y,z) = C$:

Ex: Bestäm största värdet av $f(x,y,z) = x+y^2+z$ på enhetssfären $x^2+y^2+z^2=1$.

Lösning. Vi sätter $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. Inga randpunkter finns! Vi kollar om när $\operatorname{grad} f \,/\!/\, \operatorname{grad} g$, dvs.

$$\begin{cases} f'_x = \lambda g'_x \\ f'_y = \lambda g'_y \\ f'_z = \lambda g'_z \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = \lambda \cdot 2x & (1) \\ 2y = \lambda \cdot 2y & (2) \\ 1 = \lambda \cdot 2z & (3) \end{cases}$$

(Nu fungerar ej determinant.)

$+$ bivillkoret $x^2+y^2+z^2=1$ (4)

(2) $\iff 2y - \lambda 2y = 0 \iff y(1-\lambda) = 0$

$\iff \begin{cases} y=0 \\ \text{eller} \\ \lambda = 1 \end{cases}$

$\lambda = 1$: (1) $\iff x = \frac{1}{2}$, (3) $\iff z = \frac{1}{2}$,

(4) $\iff y^2 = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \iff y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

Två punkter $\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$

$y=0$: $\begin{cases} 1 = \lambda \cdot 2x & (1) \\ 1 = \lambda \cdot 2z & (3) \\ x^2+z^2 = 1 & (4) \end{cases}$ $\quad$ $\left.\begin{matrix} (1) \\ (3) \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = z$

(4) $\iff x^2+x^2=1 \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = z$

Punkterna $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ o $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Vi måste också kolla ev. "undantagspunkter" där $\operatorname{grad} g = \bar{0} \iff (2x,2y,2z) = (0,0,0)$ $\iff (x,y,z) = (0,0,0)$. Eftersom denna ej ligger på $x^2+y^2+z^2=1$ så finns inga undantagspunkter.

Jämförelse: $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2}$

Svar: Största värdet är $3/2$

- Om vi har mer än ett bivillkor så har vi ett liknande resultat: Sats 2 (sid 179). (Ersätt parallella med linjärt beroende)

Anm: Två vektorer är parallella $\iff$ de är linjärt beroende

Ex (uppg. 4.48): För vilka punkter på kurvan

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ x+2y+2z = 0 \end{cases}$$

är z-koordinaten störst o minst?

Lösn: Kurvan är skärningen mellan en sfär och ett plan $\Rightarrow$ kompakt mängd $\Rightarrow$ största o minsta värde finns. Vidare har varken kurvan eller D_f någon rand, så vi söker "inre punkter":

Vi vill optimera $f(x,y,z) = z$ med bivillkoren $g_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = 1$ och

$g_2(x,y,z) = x+2y+2z = 0$.

Kollar när $\operatorname{grad} f$, $\operatorname{grad} g_1$, $\operatorname{grad} g_2$ är linjärt beroende:

$\operatorname{grad} f = (0,0,1)$

$\operatorname{grad} g_1 = (2x,2y,2z)$

$\operatorname{grad} g_2 = (1,2,2)$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4x - 2y = 0 \iff y = 2x,$$

som ska gälla tillsammans med bivillkoren:

$$\begin{cases} x^2+(2x)^2+z^2 = 1 \\ x + 2\cdot(2x) + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 5x^2 + z^2 = 1 & (1) \\ 5x + 2z = 0 & (2) \end{cases}$$

(2) $\iff z = -\frac{5}{2}x$ ger (1) $\iff 5x^2 + \frac{25}{4}x^2 = 1$

$\iff \frac{45}{4}x^2 = 1 \iff x = \pm\sqrt{\frac{4}{45}} = \pm\frac{2\sqrt{5}}{15}$

$\Rightarrow y = \pm\frac{4\sqrt{5}}{15}$ o $z = \mp\frac{5\sqrt{5}}{15}$.

Vi får punkterna $\frac{\sqrt{5}}{15}(-2,-4,5)$ störst z-koordinat och $\frac{\sqrt{5}}{15}(2,4,-5)$ minst.