Föreläsning 12:

1

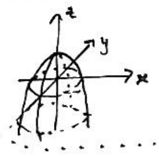
Optimering på icke-kompakta områden:

Nu finns inte garanterat största och minsta värde!

Ex: $f(x,y) = 1-(x^2+y^2)$, $D_f = \mathbb{R}^2$

har största värde $=1$, men saknar minsta värde.

($f(x,y) \to -\infty$ på "cirklar ut från origo")



Ex: Bestäm ev. största och minsta värde av

$$f(x,y) = (x+2y)e^{-(x^2+y^2)}, \quad D_f = \mathbb{R}^2.$$

Lösning: $e^{-(x^2+y^2)}$ borde göra så att $f(x,y) \to 0$ "långt borta". Vi ser också att $f(x,y)$ antar både positiva ($f(1,0) = e^{-1}$) och negativa ($f(-1,0) = -e^{-1}$) värden $\Rightarrow$ största o minsta värde borde finnas!

Stationära punkter:
$$\begin{cases} f'_x = e^{-(x^2+y^2)} + (x+2y)e^{-(x^2+y^2)}(-2x) = 0 \\ f'_y = 2e^{-(x^2+y^2)} + (x+2y)e^{-(x^2+y^2)}(-2y) = 0 \end{cases}$$

$\overset{e^{-(x^2+y^2)} \neq 0}{\Leftrightarrow}$
$$\begin{cases} (x+2y)2x = 1 \quad (1) \Leftrightarrow x+2y = \frac{1}{2x} \quad (x \neq 0) \\ (x+2y)2y = 2 \quad (2) \underset{(1)}{\Rightarrow} \frac{2y}{2x} = 2 \Leftrightarrow y = 2x \end{cases}$$

Sätts in i (1): $(x+4x)2x = 1 \Leftrightarrow 10x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}$

och vi får punkterna $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}\right)$. 2

$f\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}\right) = \frac{5}{\sqrt{10}}e^{-1/2}$ och $f\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{2}{\sqrt{10}}\right) = -\frac{5}{\sqrt{10}}e^{-1/2}$

"Långt borta": $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow$

$$f(x,y) = (r\cos\theta + 2r\sin\theta)e^{-r^2} = (\cos\theta + 2\sin\theta)re^{-r^2}$$

$\Rightarrow 0 \leq |f(x,y)| = \underbrace{|\cos\theta + 2\sin\theta|}_{\leq 3} re^{-r^2} \leq 3re^{-r^2} \to 0$ då $r \to \infty$

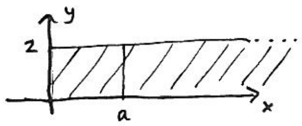
Alltså finns ett tal r_0 sådant att $|f(x,y)| < \frac{5}{\sqrt{10}}e^{-1/2}$ då $r = \sqrt{x^2+y^2} \geq r_0$. På den kompakta mängden $D_{r_0}: \sqrt{x^2+y^2} \leq r_0$ har $f(x,y)$ största/minsta värde, och dessa måste vara $\frac{5}{\sqrt{10}}e^{-1/2}$ resp. $-\frac{5}{\sqrt{10}}e^{-1/2}$, vilket också måste gälla på hela $\mathbb{R}^2$.

Svar: $f_{max} = \frac{5}{\sqrt{10}}e^{-1/2}$, $f_{min} = -\frac{5}{\sqrt{10}}e^{-1/2}$.

Ex: Bestäm ev. största o minsta värde till

$$f(x,y) = x^2e^{-x-y} \quad ; \quad D_f: x \geq 0, \ 0 \leq y \leq 2.$$

Lösning: Studera först linjer $x = a$, $0 \leq y \leq 2$.



Vi får

$$g(y) = f(a,y) = a^2e^{-a-y} = \underbrace{a^2e^{-a}}_{\text{konstant}} \cdot e^{-y} \quad \text{som}$$

är strängt avtagande (för varje a) $\Rightarrow$ störst då $y=0$, minst då $y=2$. 3

Eftersom $f(x,y) \geq 0$ och $f(0,y) = 0$ så är minsta värde 0. Vi letar efter största värde:

$y=0$: $h(x) = f(x,0) = x^2e^{-x}$, $x \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow h'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = x(2-x)e^{-x} = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ eller $x = 2$

	0		2	
$h'(x)$	0	+	0	−
$h(x)$		↗	$4e^{-2}$	↘

Vi ser att $h(x)$ (och därmed $f(x,y)$) har största värde $4e^{-2}$.

Svar: $f_{max} = 4e^{-2}$, $f_{min} = 0$.