Föreläsning 11 (1)

Optimering på kompakta områden:

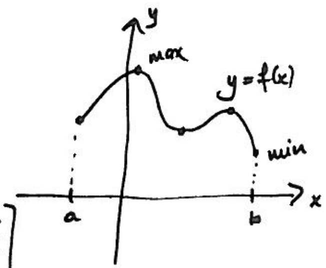
Bestäm största/minsta värde till en funktion.

Endim: En kontinuerlig funktion $f(x)$ definierad på ett kompakt intervall $[a,b]$ (slutet = ändpunkterna ingår + begränsat) har ett största och minsta värde i någon av följande punkter:

i) stationära punkter, dvs. punkter x_0 där $f'(x_0)=0$

ii) ändpunkterna a o b

[iii) punkter x_0 där $f'(x)$ ej existerar]



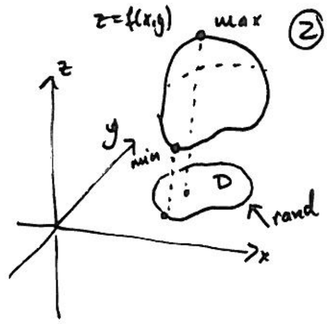
Flerdim: Vi behandlar först fallet $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. En kontinuerlig funktion $f(x,y)$ definierad på ett kompakt område D i xy-planet (slutet = randen ingår + begränsat) har ett största och minsta värde i någon av följande punkter:

(2)

i) stationära punkter, dvs. punkter (x_0,y_0) där $(\text{grad } f)(x_0,y_0)=(0,0)$

ii) randpunkter

[iii) punkter där grad f ej existerar]



Varför? Jo, ett största/minsta värde svarar speciellt mot ett lokalt max/min, och en sådan ligger antingen på randen eller är en stat. punkt (tidigare föreläsning).

> Metod: I/ Finn alla stationära punkter
>
> II/ Finn alla randpunkter där största/minsta värde kan finnas
>
> III jämför funk. värdena i dessa punkter

Anm: II/ blir ett "envariabelproblem"

Ex: Bestäm största och minsta värde till

$$f(x,y) = x^2 + x(y^2-1) \quad \text{i området } D: x^2+y^2 \le 1.$$

I) $\begin{cases} f'_x = 2x + y^2 - 1 = 0 & (1) \\ f'_y = 2xy = 0 & (2) \end{cases}$

(3)

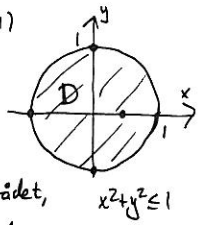
Ekv. (2) ger fallen $x=0$ eller $y=0$.

$x=0$: (1) $\Leftrightarrow y^2-1=0 \Leftrightarrow y=\pm 1$

så vi får punkterna $(0,-1)$ och $(0,1)$

$y=0$: (1) $\Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$,

och vi får punkten $(\frac{1}{2},0)$.



Punkterna $(0,\pm 1)$ tillhör visserligen området, men eftersom de ligger på randen kommer de ändå att behandlas i punkt II). Den enda intressanta punkten härifrån är därför $(\frac{1}{2},0)$, med $f(\frac{1}{2},0) = \boxed{-\frac{1}{4}}$.

II) Randen $x^2+y^2=1$ kan parametriseras $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$, $0\le t\le 2\pi$,

så här får vi envariabelfunktionen $g(t) = f(\cos t, \sin t) =$

$= \cos^2 t + \cos t(\sin^2 t - 1) = \cos^2 t + \cos t(-\cos^2 t) =$

$= \cos^2 t(1-\cos t) \ge 0$. Här ser vi, utan derivering, att $g(t)$ är som minst då $\cos t = 0$, vilket svarar mot punkterna $(0,\pm 1)$, och vi har $f(0,\pm 1) = \boxed{0}$.

Vidare är $g(t)$ som störst då $\cos t = -1$, vilket svarar mot $(-1,0)$, och vi har då $f(-1,0) = \boxed{2}$.

(Alternativt beräknar man $g'(t)$, sätter $g'(t)=0$, osv. ...)

III) Vi jämför de inringade värdena: $-1/4$, 0 och 2 och ser att 2 är störst och $-1/4$ minst. Svar: $f_{max} = 2$, $f_{min} = -1/4$

(4)

Ex: Bestäm största och minsta värde av

$$f(x,y) = x^2y - 3xy + 2x - 4y$$

i $D: \begin{cases} 0 \le y - x \le 2 \\ -2 \le x \le 0, \quad y \ge 0 \end{cases}$.

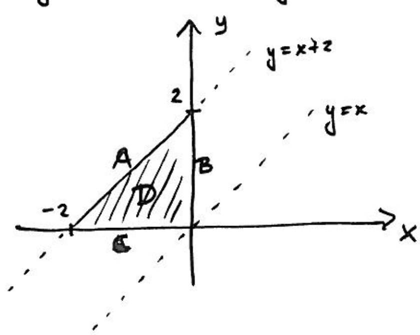
Lösning: Vi ritar först D:

$0 \le y-x \le 2 \Leftrightarrow 0 \le y-x$ och $y-x\le 2$

$\Leftrightarrow y \ge x$ och $y \le x+2$,

vilket betyder alla punkter ovanför och på linjen $y=x$ samt under och på linjen $y=x+2$.

Samtidigt ska $-2\le x\le 0$, $y \ge 0$, och vi får



(Notera att vi här faktiskt inte hade behövt kravet $0 \le y-x$!)

I)
$$\begin{cases} f'_x = 2xy - 3y + 2 = 0 & (1) \\ f'_y = x^2 - 3x - 4 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \iff (x-4)(x+1) = 0 \underset{\text{eller}}{\iff} \begin{cases} x = 4 \\ x = -1 \end{cases}$$

$x=4$ ger en punkt <u>utanför</u> D, men $x=-1$ i (1) ger

$$-2y - 3y + 2 = 0 \iff y = \frac{2}{5}.$$

Vi får den inre stationära punkten $\underline{(-1, \frac{2}{5})}$, där $f(-1,\frac{2}{5}) = \boxed{-2}$.

i området (kolla!)

II) Randen består av 3 delar A, B och C.

A) Linjestycket $y = x+2$, $-2 \le x \le 0$, kan parametriseras

$\begin{cases} x = t \\ y = t+2 \end{cases}$, $-2 \le t \le 0$, och vi får funktionen

$$g_1(t) = f(t, t+2) = t^2(t+2) - 3t(t+2) + 2t - 4(t+2) =$$
$$= t^3 + 2t^2 - 3t^2 - 6t + 2t - 4t - 8 =$$
$$= t^3 - t^2 - 8t - 8, \quad -2 \le t \le 0.$$

Vi optimerar denna som i envariabelanalys

$$g_1'(t) = 3t^2 - 2t - 8 = 0 \iff t^2 - \frac{2}{3}t - \frac{8}{3} = 0$$

$$\iff t = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{8}{3}} = \frac{1 \pm 5}{3} \underset{\text{eller}}{\iff} \begin{cases} t = 2 \\ t = -4/3 \end{cases}$$

$t=2$ ger punkten $(2,4)$ utanför området, så intressant punkt är $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}+2\right) = \underline{\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)}$, där $f(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}) =$
$= g_1(-\frac{4}{3}) = \ldots = \boxed{-\frac{40}{27}}$

Intressanta punkter är även ändpunkterna $t=-2$ och $t=0$, som svarar mot "hörnen" $\underline{(-2,0)}$ och $\underline{(0,2)}$, med

$$f(-2,0) = g_1(-2) = \boxed{-4} \quad \text{och} \quad f(0,2) = g_1(0) = \boxed{-8}.$$

B) En parametrisering är $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases}$, $0 \le t \le 2$, och vi får

$g_2(t) = f(0,t) = -4t$, som vi direkt ser är strängt avtagande. Endast ändpunkterna $t=0$ o $t=2$ är intressanta; $t=0$ svarar mot $\underline{(0,0)}$ med $f(0,0) = \boxed{0}$, medan $t=2$ ger $(0,2)$ som vi redan behandlat i A).

C) Param. $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$, $-2 \le t \le 0$, ger funktionen

$$g_3(t) = f(t,0) = 2t,$$

som är strängt växande (och ändpunkterna har redan behandlats i A) och B)).

III) Vi jämför inringade funktionsvärden:

$$-2, \; -\frac{40}{27}, \; -4, \; -8, \; 0$$

minst   störst

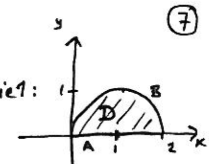
Svar: $f_{max} = 0$, $f_{min} = -8$

Ex: Bestäm största och minsta värde till

$$f(x,y) = x e^{-x^2-y^2}$$

på halvcirkelskivan D: $(x-1)^2 + y^2 \le 1$, $y \ge 0$, samt ange max- och minpunkterna.

<u>Lösning:</u> Här rör det sig om den övre halvcirkelskivan med medelpunkt $(1,0)$ o radie 1:



I)
$$\begin{cases} f'_x = 1 \cdot e^{-x^2-y^2} + x \cdot (-2x) \cdot e^{-x^2-y^2} = (1-2x^2)e^{-x^2-y^2} = 0 & (1) \\ f'_y = -2xy e^{-x^2-y^2} = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} & (1) \\ x = 0 \text{ eller } y = 0 & (2) \end{cases}$$

Vi får punkterna $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, varav endast $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ ligger i området. Denna ligger dock på randen, och kommer ändå att behandlas i steg II.

II) Randen kan delas upp i A (linjestycket) och B (halvcirkeln):

A) Vi parametriserar linjestycket, $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$, $0 \le t \le 2$,

och får $g_1(t) = f(t,0) = te^{-t^2}$, $0 \le t \le 2$.

Derivering ger $g_1'(t) = 1 \cdot e^{-t^2} + t \cdot (-2t)e^{-t^2} =$
$= e^{-t^2}(1 - 2t^2) = 0 \iff t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Endast $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ i rätt intervall; denna svarar mot punkten $\underline{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)}$ med $g_1(\frac{1}{\sqrt{2}}) = f(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2}}$

Viktiga punkter är dessutom ändpunkterna

$t=0$ och $t=2$. Dessa svarar mot $\underline{(0,0)}$ resp. $\underline{(2,0)}$, och vi får $g_1(0) = f(0,0) = \boxed{0}$ och $g_1(2) = f(2,0) = \boxed{2e^{-4}}$.

B) Vi parametriserar halvcirkeln, $\begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$, $0 \le t \le \pi$,

och får $g_2(t) = f(1+\cos t, \sin t) =$

$$= (1+\cos t)e^{-(1+\cos t)^2 - \sin^2 t} = \ldots = (1+\cos t)e^{-2-2\cos t}$$

Derivering ger $g_2'(t) = -\sin t \, e^{-2-2\cos t} + (1+\cos t)2\sin t \, e^{-2-2\cos t} =$

$$= e^{-2-2\cos t}(-\sin t + 2\sin t + 2\cos t \sin t) = e^{-2-2\cos t}(1 + 2\cos t)\sin t = 0$$

$$\iff 1 + 2\cos t = 0 \text{ eller } \sin t = 0$$
$$\iff \cos t = -\frac{1}{2} \text{ eller } \sin t = 0$$
$$\iff t = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \text{ eller } t = k\pi$$

Endast $t = 2\pi/3$ är en inre punkt till intervallet $0 \le t \le \pi$.
Denna svarar mot punkten $\left(1 - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \underline{\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$ med funk. värdet $g_2(2\pi/3) = f(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = \boxed{\frac{1}{2}e^{-1}}$.

Ändpunkterna $t=0$ och $t=\pi$ studerade vi redan i A).

III) Vi jämför de intressanta (inringade) värdena:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}, \; 0, \; 2e^{-4} \text{ och } \frac{1}{2}e^{-1}.$$

Klart att 0 är minst (övriga är positiva).

Vidare ser vi att $\frac{1}{2}e^{-1} = \frac{1}{2e} < \frac{1}{\sqrt{2e}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}$,

och att $2e^{-4} = \frac{2}{e^4} < \frac{2}{2^4} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} < \frac{1}{2e} = \frac{1}{2}e^{-1}$.

Sammantaget är alltså

$$0 < 2e^{-4} < \tfrac{1}{2}e^{-1} < \tfrac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-1/2}$$

Svar: Största värde $\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2}$ i punkten $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$,

och minsta värde 0 i punkten $(0,0)$.

Anm: Alternativ till parametrisering av halvcirkeln $(x-1)^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$, får vi genom

$$y = \underset{(-)}{+}\sqrt{1-(x-1)^2} = \sqrt{2x - x^2}$$

och låta $x = t$. Detta ger $\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{2t - t^2} \end{cases}$, $0 \leq t \leq 2$,

och således får vi $g(t) = f(t, \sqrt{2t-t^2}) =$

$$= t e^{-t^2 - (2t - t^2)} = t e^{-2t}.$$

Derivering ger $g'(t) = 1 \cdot e^{-2t} + t \cdot (-2) e^{-2t} =$

$$= e^{-2t}(1-2t) = 0 \iff t = \tfrac{1}{2},$$

som svarar mot punkten $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{2 \cdot \frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

precis som ovan.