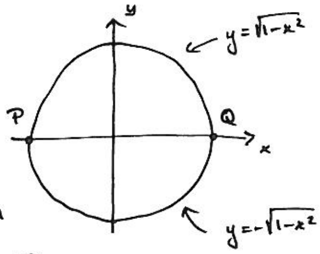
Föreläsning 10:

Genom $y = \sqrt{1-x^2}$ så ges y explicit som en funktion av x. Samma funktion ges implicit av
$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

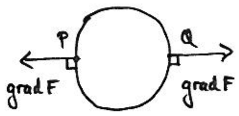


Om vi studerar $x^2+y^2=1$ (enhetscirkeln) så kan vi lokalt lösa ut y som funktion av x överallt utom i punkterna P och Q.

← Varför?

Om vi sätter $F(x,y) = x^2+y^2$, så är grad F vågrät i P och Q,

dvs. $F'_y(P) = F'_y(Q) = 0$



Sats ("skiss"): $F(x,y) = C$ nivåkurva och (a,b) punkt på denna. Om
$$F'_y(a,b) \neq 0$$
så kan y uttryckas som funktion av x, dvs. $y = y(x)$ i en omgivning av (a,b)

(För mer utförligt, se Sats 3, s.148)
"Implicita funktionssatsen"

Ex: Visa att ekvationen
$$F(x,y) = y^5 + xy - 4 = 0$$
definierar y som funktion av x nära punkten $P: (3,1)$ ← ligger på kurvan (kolla!).
Bestäm även $y'(x)$ nära P; speciellt $y'(3)$.

Lösning:

Vi har $F'_y = 5y^4 + x$, och speciellt
$$F'_y(3,1) = 5 \cdot 1^4 + 3 = 8 \neq 0 \Rightarrow y = y(x) \text{ nära } P!$$

Implicit derivering av $y(x)^5 + xy(x) - 4 = 0$ ger
$$5\,y(x)^4 \cdot y'(x) + 1 \cdot y(x) + x \cdot y'(x) - 0 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad y'(x)\left(5y(x)^4 + x\right) + y(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad y'(x) = -\frac{y(x)}{5y(x)^4 + x} \quad \text{eller} \quad y' = -\frac{y}{5y^4+x}$$

I $(x,y) = (3,1)$ får vi $y'(3) = -\dfrac{1}{5 \cdot 1^4 + 3} = -\dfrac{1}{8}$

Anm: Vi kan inte lösa ut $y(x)$, men däremot $y'(x)$!

Satsen ovan gäller även för fler variabler (se sid. 151!).