Föreläsning 9 ①

Kurvor och ytor:

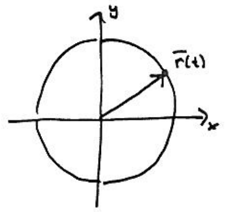
• En kurva i $\mathbb{R}^2$ är en funktion

$$\bar r(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in I. \quad (I \text{ intervall})$$

Den är av typ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, dvs. vektorvärd.

Ex: $\bar r(t) = (x(t), y(t))$

med $\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}, \ 0 \le t \le 2\pi$



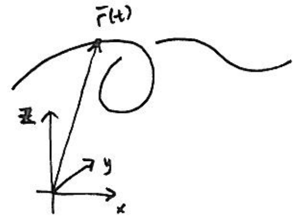
beskriver enhetscirkeln.

• En kurva i $\mathbb{R}^3$ är en funktion

$$\bar r(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in I.$$

Av typ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$.

Valet av $x(t), y(t), z(t)$ kallas en parametrisering av kurvan.



Ex: En linje i $\mathbb{R}^3$ är en kurva:

$$\bar r(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (1,2,-3) + (1,1,-3)t = (1+t, 2+t, -3-3t)$$

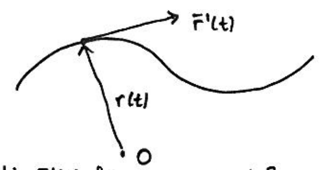
Kurvorna ovan är på parameterform.

②

Eftersom $\bar r(t)$ beskriver läget så får vi, om vi ser t som tiden,

$$\bar r'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

som hastigheten. Denna är en tangentvektor till kurvan:

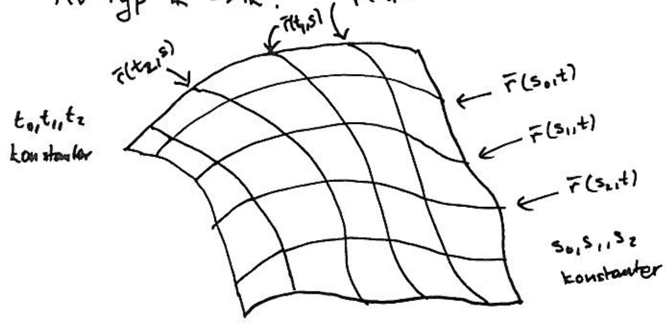


Fråga: Vad blir $\bar r'(t)$ för enhetscirkeln?

• En yta i $\mathbb{R}^3$ (på parameterform) är en funktion

$$\bar r(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t)), \quad (s,t) \in D \quad (D \text{ område})$$

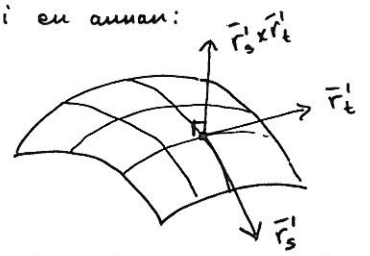
Av typ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.



Vi kan tänka det som att "s:et" ger kurvor i en riktning och "t:et" i den andra (se figur!)

③

Alltså blir $\bar r'_s$ en tangentvektor i en riktning och $\bar r'_t$ i en annan:



En normalvektor till ytan borde därför bli ortogonal mot både $\bar r'_s$ och $\bar r'_t$

$\Rightarrow \quad \bar n = \bar r'_s \times \bar r'_t$ (vektorprodukt)

är normalvektor.

Ex: $\bar r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ med

$\begin{cases} x(t) = -1 + s + t \\ y(t) = - s + 2t \\ z(t) = s - t \end{cases}$ är ett plan på parameterform, dvs. en yta.

$\bar r'_s = (1,-1,1), \quad \bar r'_t = (1,2,-1) \quad \Rightarrow$

$$\bar n = \bar r'_s \times \bar r'_t = (1,-1,1) \times (1,2,-1) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1, 2, 3)$$

Planet har alltså ekv. $\pi: \ -x + 2y + 3z + D = 0$

Punkten $(-1,0,0)$ ligger i π. Insättning ger $D = -1$.

④

Planet har ekvation $-x + 2y + 3z - 1 = 0$.
(Jämför med hur ni gjorde i lin.alg.!)

Funktionalmatriser och funktionaldeterminanter:

• För en funktion $f(x_1, x_2)$ $(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$ "samlade" vi derivatorna i gradienten

$$(\operatorname{grad} f)(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \ \ \frac{\partial f}{\partial x_2} \right)$$

ser det nu som en radmatris

• Hur samlar man derivatorna för en vektorvärd funktion, t.ex. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$-funktionen

$\bar y = \bar f(\bar x)$ som ges av $\begin{cases} y_1 = f_1(x_1,x_2) = x_1^2 + 2x_2 \\ y_2 = f_2(x_1,x_2) = x_1 x_2 \end{cases}$.

Jo, i funktionalmatrisen

$$\bar f'(\bar x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$$

Ex: För den linjära avbildningen

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1,x_2) = 3x_1 - x_2 \\ y_2 = f_2(x_1,x_2) = x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

blir $\bar f'(\bar x) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, dvs. samma som

(5)

systemmatrisen A i $Y = AX$!

Enligt teorin i linjär algebra så anger determinanten av A ($\det A$) "areaförändringen" då den linjära avbildningen tillämpas på ett objekt (i $\mathbb{R}^3$ motsv. $\det A$ volymskalan.)

För att undersöka hur areor ($\mathbb{R}^2$) (volymer ($\mathbb{R}^3$)) förändras (lokalt) beräknar vi därför funktionaldeterminanten

$$\det \bar{f}'(\bar{x}) = \frac{d(y_1,y_2)}{d(x_1,x_2)} = \frac{d(f_1,f_2)}{d(x_1,x_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

beteckningar

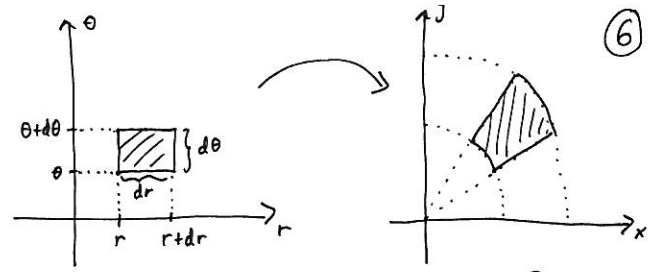
Ex: Byte till polära koordinater

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

är en funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ från r,θ-planet till x,y-planet. Hur ser areaförändringen ut?

Välj punkt (r,θ) i r,θ-planet:

(6)



Area = $drd\theta$

Area $\approx dr \cdot rd\theta = rdrd\theta$

Arean ändras med faktorn r då vi tillämpar polära koordinater!

Provar att beräkna funktionaldeterminanten

$$\frac{d(x,y)}{d(r,\theta)} = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\theta \\ y'_r & y'_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} =$$

$$= \cos\theta \, r\cos\theta - (-r\sin\theta)\sin\theta = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r \quad !$$

OK!

- Principen fungerar lokalt, dvs. för små områden. Nära en punkt $\bar{a}$ så är differensen $\bar{f}(\bar{a}+\bar{h}) - \bar{f}(\bar{a}) \approx$ en linjär avbildning:

(7)

Taylorutveckling:

$$\begin{cases} f_1(a+h,b+k) - f_1(a,b) = f'_{1x}(a,b)h + f'_{1y}(a,b)k + \text{restterm} \\ f_2(a+h,b+k) - f_2(a,b) = f'_{2x}(a,b)h + f'_{2y}(a,b)k + \text{restterm} \end{cases}$$

$$= \begin{pmatrix} f'_{1x}(a,b) & f'_{1y}(a,b) \\ f'_{2x}(a,b) & f'_{2y}(a,b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

funktionalmatris $A = \bar{f}'(\bar{a})$

Systemet kan "nästan" skrivas

$$\begin{pmatrix} \Delta f_1 \\ \Delta f_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \quad \text{i matrisspråk.}$$

OBS! Lin.alg: $\det A \neq 0 \iff$ systemet har ~~[illegible]~~ entydig lösning $\iff A$ har invers

Detta betyder att $(\Delta x, \Delta y)$ kan lösas ut som funktion av $(\Delta f_1, \Delta f_2)$, dvs. den inversa funktionen existerar nära $\bar{a} = (a,b)$. Vi får inversa funktionssatsen (Sats 2, s.144) som alltså säger att $\bar{f}$ är lokalt bijektiv.

(8)

- Vi återvänder nu till kedjeregeln, denna gång för funktioner $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Funktionen
$$\begin{cases} s = f(u(x,y), v(x,y)) \\ t = g(u(x,y), v(x,y)) \end{cases}$$

går från "xy-planet" till "uv-planet" och vidare till "st-planet". Kedjeregeln ger

$$f'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x \qquad f'_y = f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y$$

$$g'_x = g'_u \cdot u'_x + g'_v \cdot v'_x \qquad g'_y = g'_u \cdot u'_y + g'_v \cdot v'_y$$

I matrisform blir detta

$$\begin{pmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'_u & f'_v \\ g'_u & g'_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix} \quad \text{kolla!}$$

Kedjeregeln kan alltså beskrivas som matrismultiplikation med funktionalmatriser!

Vidare, från lin.alg. vet vi att $\det AB = \det A \cdot \det B$. För funk.determinanter av sammansatt funktion gäller således

$$\frac{d(f,g)}{d(x,y)} = \frac{d(f,g)}{d(u,v)} \cdot \frac{d(u,v)}{d(x,y)}.$$

(Jmfr. Sats 1)