Föreläsning 8

Differentialer:

Definitionen av differentierbarhet:

$$\underbrace{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)}_{=\Delta f} = \underbrace{f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y}_{=df} + \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\cdot \underbrace{\rho(\Delta x,\Delta y)}_{\substack{\to 0 \\ \text{då } (\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}}$$

df kallas <u>differentialen</u> av f i punkten (x,y) (se även Def. 8, s. 113), och är en funktion av Δx & Δy.

Specialfall: $g(x,y) = x \Rightarrow dg = 1\cdot\Delta x + 0\cdot\Delta y = \Delta x$

eller, eftersom "$g=x$", så får vi $dx = \Delta x$.

P.s.s. $dy = \Delta y$

Således kan vi skriva

$$\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy}.$$

Vad kan vi använda df till?

Ovan ser vi att $\Delta f \approx df$ då $(\Delta x, \Delta y)$, dvs. (dx, dy), är nära $(0,0)$. Med andra ord,

skillnaden Δf i funktionsvärdena kan approximeras av det <u>linjära uttrycket</u> df ← lätt att beräkna!

Ex: $f(x,y) = \ln|x^2+xy|$.

$$\Rightarrow df = \frac{2x+y}{x^2+xy}dx + \frac{x}{x^2+xy}dy$$

Vi vill approximera skillnaden mellan $f(2,1)$ och $f(2.01, 1.03)$!

Sätt $(x,y) = (2,1)$ och $(\Delta x, \Delta y) = (0.01, 0.03)$.

<u>Verklig skillnad:</u> $\Delta f = f(2.01, 1.03) - f(2,1) =$

miniräknare

$= \ln|(2.01)^2 + (2.01)\cdot(1.03)| - \ln|6| \approx 0.0182$

<u>Differentialen:</u> $df = \frac{5}{6}\cdot 0.01 + \frac{2}{6}\cdot 0.03 =$

$= \frac{11}{6}\cdot 0.01 \approx$ (lättare, kan räknas ut utan miniräknare)

≈ 0.0183. □