Föreläsning 6 (1)

Partiella derivator av högre ordning:

Envariabelanalys: En enda andraderivata

Flervariabelanalys: Många olika "partiella andraderivator" genom att derivera partiellt 2 ggr efter varandra i olika kombinationer.

Ex: $f(x,y) = x^4y^3 + \sin(x+2y)$

Bestäm alla derivator t.o.m. ordning 2.

Lsg:
$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x = 4x^3y^3 + \cos(x+2y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y = 3x^4y^2 + 2\cos(x+2y)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx} = 12x^2y^3 - \sin(x+2y)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy} = 6x^4y - 4\sin(x+2y)$$
$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f''_{xy} = 12x^3y^2 - 2\sin(x+2y)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f''_{yx} = 12x^3y^2 - 2\sin(x+2y)\end{aligned}\right\}\text{lika!}$$

OBS! Beteckning

Att vi får likhet är ingen slump. Detta ser vi i Sats 9 (sid. 87) i boken: (2)

"Derivationsordningen saknar betydelse"

Ex: $u(x,y) = f(r)$ där $r = \sqrt{x^2+y^2}$ (f fkn. av en variabel)

Vi vill uttrycka
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$
i r och derivator i variabeln r.

Lsg.
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = f'(r)\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \underbrace{f'(r)\cdot\frac{x}{r}}_{\text{produkt}}$$

$\frac{x}{r}$ ← kvot av två funk. som beror av x!

Vi får nu

prod.regel+kvotregel
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(f'(r)\cdot\frac{x}{r}\right) =$$
$$= f''(r)\cdot\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{x}{r} + f'(r)\cdot\frac{1\cdot r - x\frac{\partial r}{\partial x}}{r^2} =$$
$$= f''(r)\cdot\frac{x}{r}\cdot\frac{x}{r} + f'(r)\cdot\frac{r - x\cdot\frac{x}{r}}{r^2} =$$
$$= f''(r)\cdot\frac{x^2}{r^2} + f'(r)\cdot\frac{r^2-x^2}{r^3}.$$

Av symmetriskäl får vi (3)
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(r)\cdot\frac{y^2}{r^2} + f'(r)\cdot\frac{r^2-y^2}{r^3}.$$

Slutligen så får vi
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(r)\cdot\frac{x^2+y^2}{r^2} + f'(r)\cdot\frac{r^2-x^2+r^2-y^2}{r^3} =$$
$$= f''(r)\cdot\frac{r^2}{r^2} + f'(r)\,\frac{2r^2-r^2}{r^3} =$$
$$= f''(r) + f'(r)\cdot\frac{1}{r}$$

Ex: Lös den partiella diff.ekv.
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4x\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + 4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad (*)$$
genom att införa de nya variablerna $\begin{cases} u = x^2+y \\ v = x \end{cases}$.

Lösning: Vi ska (förhoppningsvis) få en enklare ekvation i bara u och v.

Kedjeregeln (med de alternativa derivatabeteckn.) ger
$$f'_x = f'_u\cdot u'_x + f'_v\cdot v'_x = f'_u\cdot 2x + f'_v\cdot 1 = f'_u 2x + f'_v$$
$$f'_y = f'_u\cdot u'_y + f'_v\cdot v'_y = f'_u\cdot 1 + f'_v\cdot 0 = f'_u$$

Inför nästa derivering inför vi hjälpfunktionerna

$g = f'_u$ och $h = f'_v$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} f'_x = g\cdot 2x + h \\ f'_y = g \end{cases}$ (4)

Vi får
$$f''_{xx} = g'_x\cdot 2x + g\cdot 2 + h'_x = [\text{kedjeregeln på } g \text{ o } h] =$$
$$= (g'_u\cdot u'_x + g'_v\cdot v'_x)\cdot 2x + 2g + (h'_u\cdot u'_x + h'_v\cdot v'_x) =$$
$$= (g'_u\cdot 2x + g'_v\cdot 1)\cdot 2x + 2g + h'_u\cdot 2x + h'_v\cdot 1 =$$
$$= 4x^2g'_u + 2xg'_v + 2g + 2xh'_u + h'_v = [\text{återgång}] =$$
$$= 4x^2f''_{uu} + \underbrace{2xf''_{uv} + 2f'_u + 2xf''_{vu}}_{=} + f''_{vv} =$$
$$= 4x^2f''_{uu} + 4xf''_{uv} + f''_{vv} + 2f'_u$$

$$f''_{yy} = g'_y = g'_u\cdot u'_y + g'_v\cdot v'_y = g'_u\cdot 1 + g'_v\cdot 0 = f''_{uu}$$

"Blandade" f''_{xy} ($= f''_{yx}$) får vi lättast genom:
$$f''_{yx} = g'_x = g'_u\cdot u'_x + g'_v\cdot v'_x = g'_u\cdot 2x + g'_v\cdot 1$$
$$= 2xf''_{uu} + f''_{uv}$$

Ekvation (*) blir nu
$$\cancel{4x^2f''_{uu}} + \cancel{4xf''_{uv}} + f''_{vv} + \cancel{2f'_u} - 4x\left(\cancel{2xf''_{uu}} + \cancel{f''_{uv}}\right) +$$
$$+ \cancel{4x^2f''_{uu}} - \cancel{2f'_u} = 0 \iff f''_{vv} = 0$$

Lös denna i "u,v-världen" (Puh!)

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial v} = \varphi_1(u) \iff f = \varphi_1(u)v + \varphi_2(u).$$ (5)

Återgång till x och y ger

<u>Svar:</u> $f(x,y) = x\varphi_1(x^2+y) + \varphi_2(x^2+y)$,

där φ_1 o φ_2 är godt. <u>C^1-funktioner</u> i en variabel.

(C^1-funktion = funktion som är partiellt der.bar och där alla part. derivator är kontinuerliga)

<u>Anm:</u> Det är inte nödvändigt att använda hjälpfunktioner. Känner man sig säker så kan man "köra direkt":

$$f'_x = f'_u \cdot 2x + f'_v \implies$$

$$\underline{f''_{xx}} = \left(f''_{uu}\cdot u'_x + f''_{uv}\cdot v'_x\right)\cdot 2x + f'_u \cdot 2 +$$
$$+ \left(f''_{vu}\cdot u'_x + f''_{vv}\cdot v'_x\right) =$$
$$= \left(f''_{uu}\cdot 2x + f''_{uv}\cdot 1\right)\cdot 2x + 2f'_u + \left(f''_{vu}\cdot 2x + f''_{vv}\cdot 1\right) =$$
$$= \underline{4x^2 f''_{uu} + 4x f''_{uv} + f''_{vv} + 2f'_u}.$$