Föreläsning 4

Kedjeregeln:

I envariabelfallet gäller $\frac{d}{dt}f(g(t)) = f'(g(t))\,g'(t)$

eller med $u=f(x)$ o $x=g(t)$: $\frac{du}{dt}=\frac{df}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$.

Ex: $D(\sin(\cos x^2)) = \cos(\cos x^2)\cdot D(\cos x^2) =$

$$= \cos(\cos x^2)\cdot(-\sin x^2)\,D(x^2) = -2x\cdot\sin x^2\cdot\cos(\cos x^2). \ \square$$

Med denna regel klarar vi också de partiella derivatorna av t.ex. $u(x,y)=f(g(x,y))$, dvs.

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \Rightarrow u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$

Ex: $u(x,y)=\arctan\frac{x}{y}$. $\left(f(t)=\arctan t,\ t=g(x,y)=\frac{x}{y}\right)$

$$\Rightarrow u'_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\cdot\frac{1}{y} = \ldots = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$u'_y = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{df}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = \ldots = -\frac{x}{x^2+y^2} \quad \square$$

Anm: d för en.var.derivata, ∂ för part.derivata.

Ex: Finn alla lösningar av formen $u(x,y)=f(xy)$ (t.ex. $\sin(xy)$, $\frac{1}{xy}$) till den partiella diff.ekv.

$$x u'_x + y u'_y + u = 1, \qquad x>0, y>0 \quad (1)$$

Lösning: Sätt $t=xy \Rightarrow u(x,y)=f(t)$.

Kedjeregeln: $u'_x = \frac{df}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial x} = f'(t)\cdot y$ och

$$u'_y = \frac{df}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial y} = f'(t)\cdot x$$

Insättning i (1) ger

$$xy f'(t) + xy f'(t) + f(t) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 2t f'(t) + f(t) = 1 \qquad (2)$$

Detta är en diff.ekv. i en variabel som vi kan lösa med integrerande faktor:

$$(2) \overset{t>0}{\Leftrightarrow} f'(t) + \frac{1}{2t}f(t) = \frac{1}{2t} \qquad \text{IF: } e^{\frac{1}{2}\ln|t|} \overset{t>0}{=} e^{\frac{1}{2}\ln t} = e^{\ln(t^{1/2})} = t^{1/2} = \sqrt{t}.$$ Vi får

$$(2) \Leftrightarrow (f(t)\cdot\sqrt{t})' = \frac{\sqrt{t}}{2t} = \frac{1}{2}\cdot t^{-1/2}$$

$$\Leftrightarrow f(t)\cdot\sqrt{t} = t^{1/2} + C \Leftrightarrow f(t) = 1 + \frac{C}{\sqrt{t}}.$$

Återgång till xy ger

Svar: $u(x,y) = 1 + \frac{C}{\sqrt{xy}}$ (C konstant)

Vi övergår nu till att studera fallet

$$u(t) = f(g_1(t), g_2(t)),\ \text{dvs.} \begin{cases} f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \\ g_1,g_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\end{cases} \Rightarrow u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}.$$

Ex: $f(x_1,x_2) = x_1^2 - x_1x_2$, $\begin{cases} x_1=g_1(t)=\cos t \\ x_2=g_2(t)=\sin t\end{cases}$

$$\Rightarrow u(t) = f(g_1(t),g_2(t)) = f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t - \cos t\sin t$$

eller lite "slarvigt" $u(t) = u(g_1(t), g_2(t)) = \ldots$ samma namn! $\square$

Eftersom t ingår i både g_1 och g_2 borde båda dessa ingå i kedjeregeln. Kedjeregeln blir nu

$$\boxed{\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot\frac{dx_2}{dt} \qquad (*)}$$

Studera gärna beviset själva!

Ex: Direkt derivering av $u(t) = \cos^2 t - \cos t\sin t$

ger $u'(t) = 2\cos t(-\sin t) - (-\sin t\sin t + \cos t\cdot\cos t) =$

$$= -2\cos t\sin t + \sin^2 t - \cos^2 t$$

Med kedjeregeln får vi $f'_{x_1} = 2x_1 - x_2$, $f'_{x_2} = -x_1$

$$\Rightarrow u'(t) = (2\cos t - \sin t)(-\sin t) + (-\cos t)\cos t = -2\cos t\sin t + \sin^2 t - \cos^2 t$$ Samma! $\square$

Den allmänna kedjeregeln (i enklaste fallet $\mathbb{R}^2$) behandlar funktioner

$$u(t_1,t_2) = f(g_1(t_1,t_2), g_2(t_1,t_2)),\ \text{dvs.}$$

$$f,\ g_1 \text{ och } g_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \Rightarrow u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}.$$

Partiella versionen av (*) ovan blir (med $x_1=g_1$, $x_2=g_2$)

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_1},}$$

och motsvarande för $\frac{\partial u}{\partial t_2}$.

Ex: Om u är en funktion av (x_1,x_2) och $\begin{cases} x_1=3t_1+t_2 \\ x_2=t_1\end{cases}$, så kan u ses som funktion av (t_1,t_2). Vi vill uttrycka $\frac{\partial u}{\partial t_1} - 3\frac{\partial u}{\partial t_2}$ i derivator av x_1 och x_2.

Kedjeregeln:
$$\frac{\partial u}{\partial t_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot 3 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial t_2} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_2} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot 1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t_1} - 3\frac{\partial u}{\partial t_2} = 3\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} - 3\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_2}$$

Vi har gjort variabelbytet $\begin{cases} x_1 = 3t_1 + t_2, \\ x_2 = t_1 \end{cases}$

och fått ett enklare uttryck!

Ex: Bestäm alla funktioner $f(x,y)$ som uppfyller ekvationen

$$(*) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial f}{\partial y} = x, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

och villkoret $f(0,y) = e^y$, $y \in \mathbb{R}$, genom att införa nya variabler $\begin{cases} u = 3x + y \\ v = x \end{cases}$.

Lösning: $\begin{cases} u = 3x+y \\ v = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = v \\ y = u - 3v \end{cases}$, så f är även funktion av (u,v).

Kedjeregeln: $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot 3 + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot 0$$

Ekv. (*) blir nu (6)

$$3\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} - 3\frac{\partial f}{\partial u} = x \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial v} = v$$

OBS! Detta var faktiskt exakt samma sak som vi gjorde i förra exemplet. Vi bara bytte beteckningar (f motsvarar u, (x,y) motsv. (t_1,t_2), (u,v) motsv. (x_1,x_2))

Vi har transformerat (*) till den enklare ekv. $\frac{\partial f}{\partial v} = v$. Löses i "uv-världen":

$\frac{\partial f}{\partial v} = v \Leftrightarrow f = \frac{v^2}{2} + \varphi(u)$, $\varphi(u)$ godt. der.bar funktion i en variabel

Återgång till x,y ger $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \varphi(3x+y)$

Vi kollar nu denna allmänna lösning mot villkoret $f(0,y) = e^y$:

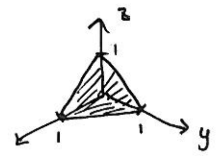
$$f(0,y) = 0 + \varphi(3\cdot 0 + y) = \varphi(y) = e^y.$$

$$\Rightarrow \varphi(3x+y) = e^{3x+y}.$$

Svar: $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + e^{3x+y}$.

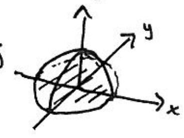
1.10. Rita följande mängder i $\mathbb{R}^2$: (7)

$M_1 = \{(x,y,z) \mid x+y+z \le 1, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\}$



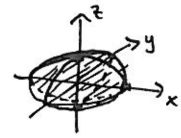
Tetraeder

$M_2 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \le 4, z \ge 0\}$



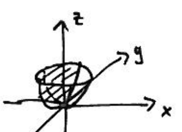
Halvklot, radie 2

$M_3 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+4z^2 \le 1\}$



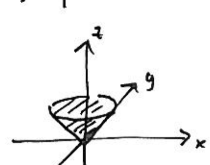
"Fylld" Ellipsoid, halvaxlar 1, 1, 1/2

$M_4 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \le z \le 1\}$



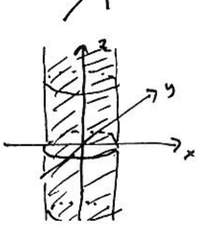
"Fylld" Paraboloid, "avskuren" med planet $z=1$.

$M_5 = \{(x,y,z) \mid \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1\}$



"Fylld" Kon, "avskuren" med planet $z=1$

$M_6 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \le 1\}$



"Fylld" Cylinder, radie 1.

1.27. b) $\lim\limits_{x^2+y^2\to\infty} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$? (8)

$$0 \le \left|\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right| = \left[\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, x^2+y^2\to\infty \Rightarrow r\to\infty\right] =$$

$$= \left|\frac{\sin(r^2)}{r^2}\right| = \frac{1}{r^2}\underbrace{|\sin(r^2)|}_{\le 1} \le \frac{1}{r^2} \to 0 \text{ då } r\to\infty$$ (oberoende av vinkeln θ)

$$\Rightarrow \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \to 0 \text{ då } x^2+y^2\to\infty$$

d) $\lim\limits_{x^2+y^2\to\infty} xye^{-x^2-y^2} = 0$, ty

$$0 \le \left|xye^{-x^2-y^2}\right| \overset{r,\theta}{=} \left|r^2\cos\theta\sin\theta\, e^{-r^2}\right| = \frac{r^2}{e^{r^2}}\underbrace{|\cos\theta\sin\theta|}_{\le 1}$$

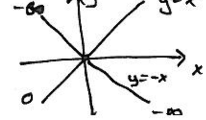
$$\le \frac{r^2}{e^{r^2}} \to 0 \text{ då } r\to\infty \text{ (oberoende av } \theta)$$

e) $\lim\limits_{x^2+y^2\to\infty} xye^{-(x+y)^2}$ saknas, ty

$$xye^{-(x+y)^2} \overset{y=-x}{=} -x^2e^0 = -x^2 \to -\infty \text{ då } |x|\to\infty$$

men $xye^{-(x+y)^2} \overset{y=x}{=} x^2e^{-4x^2} = \frac{x^2}{e^{4x^2}} \to 0$ då $|x|\to\infty$

Olika gränsvärden då $x^2+y^2\to\infty$ längs linjerna $y=-x$ och $y=x$!



$\boxed{\text{Lös 1.30 själva!}}$