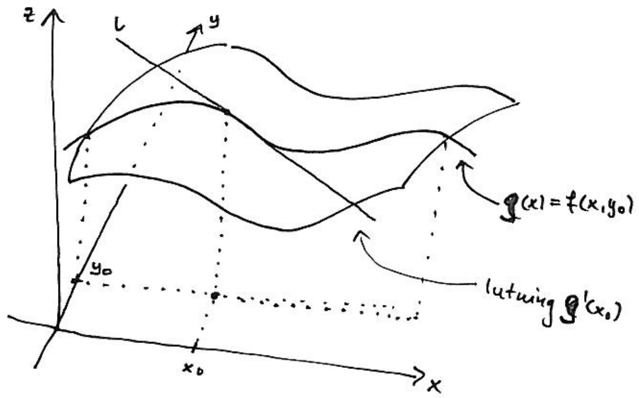
Föreläsning 3 (1)

Partiella derivator:

Betrakta funktionsytan till en funktion $f(x,y)$, och skär denna med planet $y=y_0$:



Vi får då en funktionskurva för funktionen

$$g(x) = f(x,y_0)$$

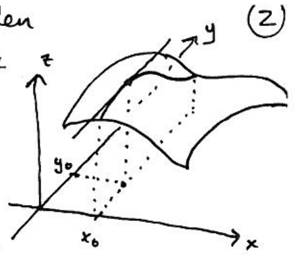
i en variabel (i x). Nu kan vi precis som tidigare i envariabelanalysen beräkna lutningen av varje tangent L längs denna kurva. I punkten (x_0,y_0) får vi lutningen $g'(x_0)$. Denna lutning kallas den partiella derivatan av f i (x_0,y_0) med avseende på variabeln x, och betecknas

$$f'_x(x_0,y_0) \quad \text{eller} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$$

Se även definition på s. 46 i boken!

På motsvarande sätt inför vi den partiella derivatan med avseende på y. Beteckning (2)

$$f'_y(x_0,y_0) \quad \text{eller} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$



Vi kan på motsv. sätt definiera partiella derivator för ~~funktioner~~ funktioner m.a.p tre eller fler variabler.

Hur beräknar man partiella derivator?

Metod:	– (Derivata m.a.p x) Betrakta alla y som konstanter och derivera som vanligt! – (Derivata m.a.p y) Betrakta alla x som konstanter!

Ex: Beräkna f'_x o f'_y för $f(x,y) = x^3y^2$.

Lösning: För f'_x så betraktar vi y^2 som en konstant (den bara "följer med")

$$f'_x = 3x^2y^2.$$

På samma sätt får vi $f'_y = 2x^3y$.

Vanliga deriveringsregler gäller:

Ex: För $f(x,y) = ye^{xy}$ får vi

$$f'_x = y\cdot e^{xy}\cdot y = y^2e^{xy} \quad \text{(kedjeregeln, inre derivata,}$$

$$f'_y = 1\cdot e^{xy} + y\cdot e^{xy}x = (1+xy)e^{xy} \quad \begin{pmatrix}\text{prod. regeln}\\ \text{+ kedjeregeln}\end{pmatrix}$$ (3)

□

Ibland behöver vi hitta primitiver "partiellt", och då är det viktigt att tänka på följande:

> Envariabelfallet: $f'(x)=0 \Rightarrow f(x)=C$ (konstant)
>
> Flervariabelfallet: $f'_x(x,y)=0 \Rightarrow f(x,y)=\varphi(y)$, där φ godtycklig funktion i en variabel, ty allt som innehåller y ses som konstant då vi beräknar f'_x!

Ex: Finns $f(x,y)$ sådan att $\begin{cases} f'_x = 3x^2y+y^2 & (1) \\ f'_y = x^3+2xy+3y^2 & (2)\end{cases}$?

Lösning: (1) ger $f(x,y) = x^3y + xy^2 + \varphi(y)$.

Derivering av denna m.a.p y ger $f'_y = x^3+2xy+\varphi'(y)$, vilket skall jämföras med (2)

$\Rightarrow$ stämmer med $\varphi'(y) = 3y^2 \Rightarrow \varphi(y) = y^3+C$

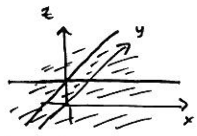
Svar: Ja, $f(x,y) = x^3y+xy^2+y^3+C$ (kolla!)

I en variabel gäller f deriverbar $\Rightarrow f$ kontinuerlig

Detta gäller inte nu:

Ex: Betrakta $z = f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{om } x=0 \text{ eller } y=0 \\ 0 & \text{annars}\end{cases}$

$f(x,y)$ är deriverbar i origo, med $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$, men uppenbarligen inte kontinuerlig. (Tänk!) (4)



□

Vi inför därför begreppet differentierbarhet.

I en variabel har vi:

$f(x)$ deriverbar i $x=a$ med derivata A

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = A \Leftrightarrow \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = A + \rho(h)$$

där $\lim_{h\to 0}\rho(h) = 0$. En omskrivning ger

$$f(a+h)-f(a) = Ah + h\rho(h), \text{ där } \lim_{h\to 0}\rho(h)=0$$

Generaliserar vi detta till flera variabler, t.ex. två, får vi

$$\boxed{f(a+h,b+k)-f(a,b) = Ah+Bk+\sqrt{h^2+k^2}\,\rho(h,k), \quad \text{där } \lim_{(h,k)\to(0,0)}\rho(h,k)=0} \qquad (*)$$

Funktionen $f(x,y)$ sägs vara differentierbar i (a,b) om det finns tal A och B och en funktion $\rho(h,k)$ som uppfyller $(*)$. Se Def 2, s. 53 för allmän definition för funk. av fler variabler.

Man kan visa att en differentierbar funktion

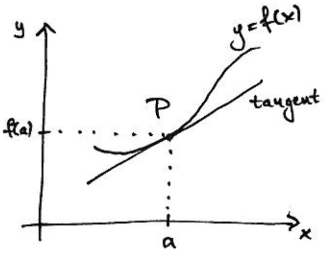
- är kontinuerlig (Sats 1, s. 53)
- är partiellt deriverbar, dvs. alla partiella derivator existerar. Dessutom är (se ovan)

$$A = f'_x(a,b) \quad , \quad B = f'_y(a,b). \quad \text{(Sats 2, s.54)}$$

Det är jobbigt att visa differentierbarhet m.h.a definitionen, så man använder Sats 3, sid. 56. I princip, alla "vanliga" elementära funktioner är differentierbara.

Tangentplan

Repetition envariabelfallet. Tangenten i punkten P har ekvationen

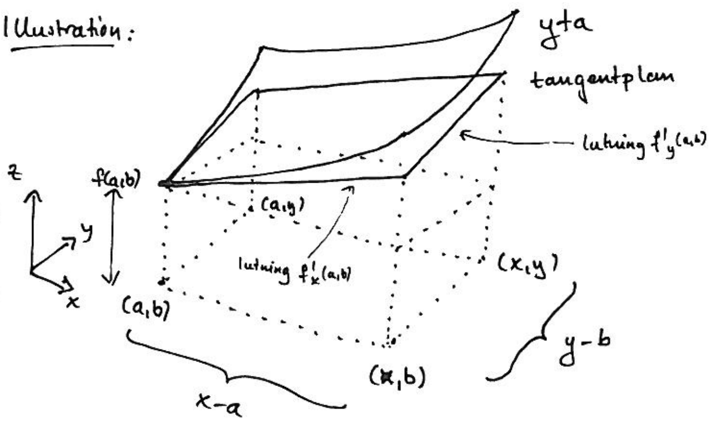


$$y = f(a) + f'(a)(x-a) \quad (\text{eller } y - f(a) = f'(a)(x-a))$$

För funktionsytan $z = f(x,y)$ blir motsvarigheten till tangent ett helt plan som "tangerar" (Tänk!) Derivatorna f'_x och f'_y anger lutningen i x-led resp. y-led, så tangentplanet i punkten $(a, b, f(a,b))$ får ekvationen

$$\boxed{z = f(a,b) + f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b)}$$

Illustration:



Ex: Bestäm en ekvation för tangentplanet till

$$z = f(x,y) = x^2 + xy$$

i punkten $P: (1,2,3)$.

Lösning: Kollar först att punkten ligger på ytan

$$3 = 1^2 + 1 \cdot 2 \quad \text{OK!} \qquad \begin{cases} f'_x = 2x + y \\ f'_y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_x(1,2) = 4 \\ f'_y(1,2) = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ekv. blir $z = 3 + 4(x-1) + 1 \cdot (y-2)$

$\Leftrightarrow$ $\underline{4x + y - z - 3 = 0}$ (ekv. för plan!) □

Läs själva avsnittet om felanalys, s. 58–60.