1

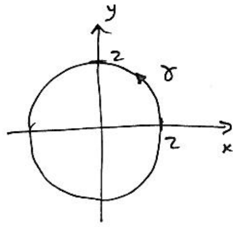
9.9. Beräkna

$$I=\int_\gamma (x^3-x^2y)\,dx + xy^2\,dy$$

där γ är cirkeln $x^2+y^2=4$ genomlöpt en gång moturs.

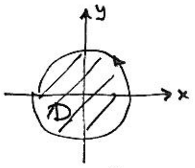
Lösning: Vi provar först att parametrisera: $\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases}$

$\theta : 0 \to 2\pi$



$$I = \int_0^{2\pi} \Big(\big(8\cos^3\theta - 8\cos^2\theta\sin\theta \big) 2(-\sin\theta) + 8\cos\theta\sin^2\theta \cdot 2\cos\theta \Big)\, d\theta$$

Blir besvärlig! Provar Greens formel i stället:



$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy =$$

$$= \iint_D \left(y^2 + x^2 \right) dx\,dy = \big[\text{pol. koord.} \big] =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \left(r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta \right) \cdot r\, dr \right) d\theta =$$

2

$$= 2\pi \cdot \int_0^2 r^3\, dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^2 = \underline{\underline{8\pi}}$$

9.37. a) Visa att om differentialformen

$$\omega = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

är exakt i området D (dvs. om (P,Q) har en potentialfunktion) så är $\int_\gamma = 0$ för varje sluten väg γ i D.

Lösning: Om $U(x,y)$ potentialfunktion, så gäller

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = U(x_1,y_1) - U(x_0,y_0)$$

slutpunkt

startpunkt

Om γ är sluten så är $(x_0,y_0) = (x_1,y_1)$, och

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = U(x_1,y_1) - U(x_1,y_1) = \underline{\underline{0}}.$$

3

b) Avgör om formen

$$\omega = \frac{x-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dy$$

är exakt i $D: x^2+y^2>0$.

Lösning: Området $D: x^2+y^2>0 \iff (x,y) \neq (0,0)$ ej enkelt sammanhängande (har "hål" i origo), så även om det skulle gälla att $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, så kan vi inte säkert säga att (P,Q) är ett potentialfält.

Att försöka lösa $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{x-y}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x+y}{x^2+y^2} \end{cases}$ verkar besvärligt.

Vi provar istället att beräkna $\int_\gamma P\,dx + Q\,dy$ där γ är enhetscirkeln genomlöpt i positiv led (en sluten väg): $\gamma : \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$ $\theta : 0 \to 2\pi$

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos\theta - \sin\theta}{\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{=1}} (-\sin\theta) + \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{=1}} \cos\theta \right) d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\cancel{\sin\theta\cos\theta} + \underbrace{\sin^2\theta + \cos^2\theta}_{=1} + \cancel{\sin\theta\cos\theta} \right) = 2\pi \neq 0.$$

Motsäger a)!

Slutsats: Ej potentialfält.

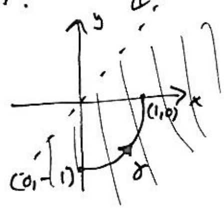
4

9.46. Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma \frac{-2y}{(x-y)^3}\,dx + \frac{x+y}{(x-y)^3}\,dy,$$

där γ är ett kvarts varv av enhetscirkeln i positiv led från $(0,-1)$ till $(1,0)$.

"farliga punkter"



Lösning: Parametrisering verkar vara besvärligt. Räkningar visar att $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ (kolla!),

Så undviker vi ~~farliga~~ "hål" från "farliga punkter" så är (P,Q) ett potentialfält. T.ex är (P,Q) ett potentialfält i området $y<x$ (saknar "hål")

Vi försöker hitta en potential där:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{-2y}{(x-y)^3} & (1) \\ \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x+y}{(x-y)^3} & (2) \end{cases}$$

(1) ger $U(x,y) = \int \frac{-2y}{(x-y)^3}\,dx = \frac{y}{(x-y)^2} + g(y)$

där $g(y)$ godt. C^1-funk. av y.

Deriverar och jämför med (2):

(5)

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1\cdot(x-y)^2 - y\cdot 2\cdot(-1)(x-y)}{(x-y)^4} + g'(y) =$$

$$= \frac{x-y+2y}{(x-y)^3} + g'(y) = \frac{x+y}{(x-y)^3} + g'(y)$$

Jämförelse med (2) ger att $g'(y)=0 \iff g(y)=C$

Som potential fungerar alltså $U(x,y)=\frac{y}{(x-y)^2}(+C)$

Vi får nu:

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = U(1,0) - U(0,-1) =$$

$$= \frac{0}{(1-0)^2} - \frac{-1}{(0-(-1))^2} = \underline{\underline{1}}.$$