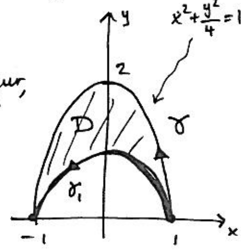
Föreläsning 22:

①

Förra förel. beräknade vi $\int_\gamma P\,dx + Q\,dy$, där

$$\begin{cases} P = -\dfrac{y}{x^2+y^2} \\ Q = \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{cases}$$ och γ är enl. figur,



genom att i stället beräkna

$\int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy$ och använda

Greens formel:

$$\int_\gamma P\,dx+Q\,dy - \int_{\gamma_1} P\,dx+Q\,dy = \int_{\partial D} P\,dx+Q\,dy = \iint_D \overbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)}^{=0 \text{ (obs!)}} dx\,dy = 0.$$

Det var extra lämpligt att byta väg i just detta fall eftersom $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$.

Def: Vektorfältet (P,Q) kallas ett <u>potentialfält</u> eller ett <u>konservativt fält</u> i det öppna området Ω om det finns en C^1-funktion $U(x,y)$ i Ω sådan att

$$(P,Q) = \text{grad}\, U, \text{ dvs. } (P,Q) = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

Funktionen U kallas då <u>potential</u> till fältet.

②

Sats (sid 352): (I)

$$(P,Q) \text{ potentialfält} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Bevis: $(P,Q) = \text{grad}\,U = \left(\dfrac{\partial U}{\partial x}, \dfrac{\partial U}{\partial y}\right) \Rightarrow$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{\partial P}{\partial y}. \square$$

Vårt första exempel indikerar att en kurvintegral då är "<u>oberoende</u> av <u>vägval</u>". Det är t.o.m. så att potentialen U ger en slags "primitiv funktion":

Sats (s. 345) (II) Låt (P,Q) vara potentialfält med potentialen U i området Ω. För varje kurva γ i U gäller då att

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = U(x_1,y_1) - U(x_0,y_0),$$

där (x_0,y_0) är startpunkt och (x_1,y_1) slutpunkt för γ.

Anm: Spec. är då integralen oberoende av vägvalet.

③

Bevis: Antag att $\gamma: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $t: \alpha \to \beta$.

Eftersom $\dfrac{d}{dt} U(x(t),y(t)) = \dfrac{\partial U}{\partial x}\cdot\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial U}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dt} =$

$= P\cdot\dfrac{dx}{dt} + Q\cdot\dfrac{dy}{dt}$ får vi

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int_\alpha^\beta \left(P\cdot\frac{dx}{dt} + Q\cdot\frac{dy}{dt}\right)dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt} U(x(t),y(t))\,dt = \Big[U(x(t),y(t))\Big]_\alpha^\beta =$$

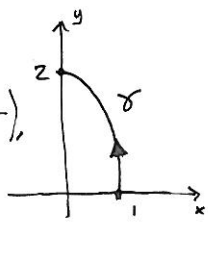
$$= U(x(\beta),y(\beta)) - U(x(\alpha),y(\alpha)) = U(x_1,y_1) - U(x_0,y_0). \square$$

Ex: Beräkna

$$I = \int_\gamma \frac{x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{y}{x^2+y^2}\,dy, \text{ där}$$

γ är kurvan $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$ i första kvadranten från $(1,0)$ till $(0,2)$.

Lösning: $U(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ är potential till $(P,Q) = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$, (kolla!) så länge $(x,y) \neq (0,0)$.



④

Vi får därför

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = U(0,2) - U(1,0) = \frac{1}{2}\ln 4 - \frac{1}{2}\underbrace{\ln 1}_{=0} = \underline{\ln 2}.$$

Anm: Speciellt, om det finns en potential så är kurvintegralen av varje <u>sluten</u> kurva $\underline{= 0}$.

Ex: Vi återgår till exemplet från förra föreläsningen:

$(P,Q) = \left(-\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$. Om γ_2 är hela enhetscirkeln i positiv led, så får vi

$$\int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy = \left[\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases} \theta: 0 \to 2\pi\right] =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin\theta}{\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{=1}}\cdot(-\sin\theta) + \frac{\cos\theta}{\underbrace{\cos^2\theta+\sin^2\theta}_{=1}}\cdot\cos\theta\right)d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \underbrace{(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}_{=1}\,d\theta = 2\pi \neq 0 \quad !$$

Slutsats: Det finns ingen potential till (P,Q), trots att $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$! (Observera att $(x,y) = (0,0)$ "farlig" punkt.)

Omvändningen till resonemanget ovan gäller: (5)

Sats (s.349) (III)

$\begin{cases} \Omega \text{ bågvis sammanhängande öppen mängd} \\ (P, Q) \text{ kontinuerligt vektorfält på } \Omega \end{cases}$,

Om $\int_\gamma P\,dx + Q\,dy$ är oberoende av vägen, så har (P,Q) en potential i Ω.

Bevis ("skiss"): Vi konstruerar U genom

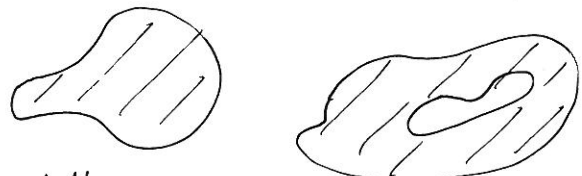
$$U(x,y) = \int_\gamma P(s,t)\,ds + Q(s,t)\,dt,$$

där γ går från ~~[illegible]~~ den fixa punkten (a,b) till den variabla punkten (x,y).

(Jämför analysens huvudsats: $F(x) = \int_a^x f(s)\,ds$.) D

Vi har sett att $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ ej garanterar en potential. I exemplet var (P,Q) ej definierat i $(0,0)$, dvs. området var ej enkelt sammanhängande:

Enkelt sammanhängande $\approx$ sammanhängande "utan hål". (6)



enkelt sammanhängande

ej enkelt sammanhängande.

Om området är enkelt sammanhängande gäller följande sats:

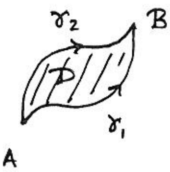
Sats (s.353): (IV)

Ω enkelt sammanhängande (och öppen)

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \Rightarrow \text{potential finns}$$

Bevis ("skiss"): Greens formel kan användas:

$$\int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2} = \iint_D 0\,dx\,dy = 0$$



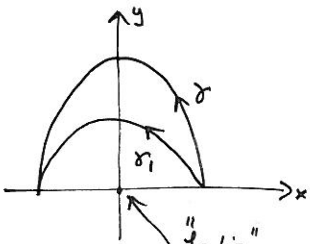
$\Rightarrow \int_{\gamma_1} = \int_{\gamma_2}$, dvs.

integral oberoende av väg $\Rightarrow$ Potential finns. □

Tänk nu efter varför vi inte kan byta ut ellipsbiten i exemplet från förra föreläsningen mot t.ex. undre halvan av enhetscirkeln! Hur stort hade felet i svaret blivit? (7)

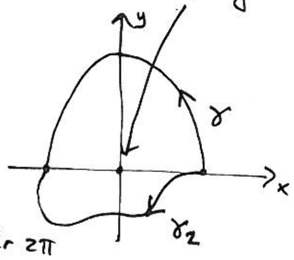
$$\boxed{\int_\gamma -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy}$$

γ_1 funkar!



"farlig"

γ_2 funkar ej! Området ej enkelt sammanhängande, "hål" i origo.



Felet blir här 2π (jmfr. exempel ovan!)

Sammanfattning: (8)

① $\int_\gamma P\,dx + Q\,dy$ oberoende av vägen i Ω.

② Det finns potential U till (P,Q) i Ω.

③ $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ i Ω

$$① \underset{\text{Sats II}}{\overset{\text{Sats III om bågvis sammanh.}}{\rightleftarrows}} ② \underset{\text{Sats IV om enkelt sammanh.}}{\overset{\text{Sats I}}{\rightleftarrows}} ③$$

Således är alla 3 villkoren ekvivalenta (i lämpligt område).

Ex: Tyngdkraftfältet $(P,Q) = (0, -mg)$ har potentialen $U(x,y) = -mgy$, så precis som vi vill är kurvintegralen (=arbetet) oberoende av vägval.