Föreläsning 20: ①

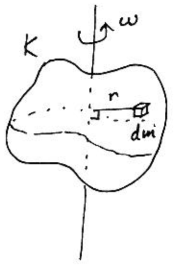
Tröghetsmoment:

(Fysik) • Kinetisk energi för massa m med fart v är $E = \frac{mv^2}{2}$.

• Rotation med radie r och vinkelhastighet ω (rad/s)

$$\Rightarrow \quad v = r\omega \quad \text{och} \quad E = \frac{m(r\omega)^2}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\omega^2 r^2 m}}$$

Stel kropp K roterar: Massbiten dm har energi $dE = \frac{1}{2}\omega^2 r^2 dm$



$\Rightarrow$ Hela kroppen:

$$\int_K dE = \underbrace{\frac{1}{2}\omega^2}_{\text{beror ej av } K} \underbrace{\int_K r^2\, dm}_{\text{Tröghetsmomentet } J}$$

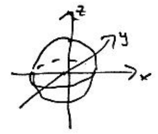
$$\boxed{\text{I vår kurs: } J = \iiint_K r(x,y,z)^2 \overset{\text{Densitet}}{\rho(x,y,z)}\, dx\,dy\,dz}$$

Anm: Om rotationsaxeln är z-axeln så blir $r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$.

Ex: Beräkna tröghetsmomentet m.a.p. z-axeln för den homogena kroppen $D: x^2+y^2+z^2 \le R^2$ med densitet 1 (i någon enhet). ②

Lösning: D klot med radie R.

Vi skall beräkna



$$J = \iiint_D (x^2+y^2)\cdot 1\, dx\,dy\,dz$$

Rymdpolära koordinater: $\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$, $E: \begin{cases} 0 \le r \le R \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

Vi får $x^2+y^2 = r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi =$

$= r^2\sin^2\theta \underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{=1} = r^2\sin^2\theta$, så

$$J = \iiint_E r^2\sin^2\theta \cdot \overbrace{r^2\sin\theta}^{\text{funk.det.}}\, dr\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= \left(\int_0^R r^4\, dr\right)\cdot\left(\int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi} 1\cdot d\varphi\right) =$$

$$= 2\pi \cdot \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^R \cdot \left(\int_0^\pi (1-\cos^2\theta)\sin\theta\, d\theta\right) =$$

③

$$= 2\pi\cdot\frac{R^5}{5}\cdot\left[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^\pi = \frac{2\pi R^5}{5}\left(1-\frac{1}{3}-\left(-1+\frac{1}{3}\right)\right) =$$

$$= \frac{8\pi R^5}{15}$$

(OBS! Med rymdpolära koordinater blir $x^2+y^2 = r^2\sin^2\theta$, inte r^2.)

Masscentrum (tyngdpunkt):

(Endim) För kropp D med massa m får vi (t.ex.)

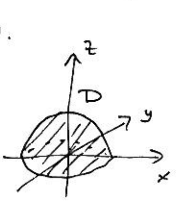
$$x_T = \frac{1}{m}\int_D x\, dm$$

(Flerdim)

$$\boxed{x_T = \frac{1}{\underbrace{\iiint_D \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}_{m}} \cdot \iiint_D x\cdot\rho(x,y,z)\, dx\,dy\,dz}$$

Ex: Beräkna tyngdpunktens läge för det homogena halvklotet $D: x^2+y^2+z^2 \le R^2$, $z \ge 0$.

Lösning: Av symmetriskäl är $x_T = y_T = 0$.



Beräkna z_T: Med rymdpolära koordinater så övergår D i $E: 0 \le r \le R,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \varphi \le 2\pi$.

④

D homogen $\Rightarrow$ vi kan anta att $\rho(x,y,z) = 1$, och

• $$\iiint_D z\cdot 1\, dx\,dy\,dz = \iiint_E r\cos\theta\cdot r^2\sin\theta\, dr\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= \left(\int_0^R r^3\, dr\right)\cdot\left(\int_0^{\pi/2} \cos\theta\sin\theta\, d\theta\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi} 1\cdot d\varphi\right) =$$

$$= 2\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin 2\theta\, d\theta = 2\pi\cdot\frac{R^4}{4}\cdot\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{\pi R^4}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}(-1) - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{\pi R^4}{4}$$

• $$\iiint_D 1\, dx\,dy\,dz = \text{halvklotets volym} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{2\pi R^3}{3}$$

$$\Rightarrow \quad z_T = \frac{1}{\frac{2\pi R^3}{3}}\cdot\frac{\pi R^4}{4} = \frac{3}{8}R$$

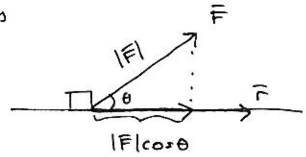
Svar: $(0, 0, \frac{3}{8}R)$

Kap 9: Kurvintegraler:

Vi ska nu integrera en vektor (eller ett vektorfält) över en kurva i xy-planet.

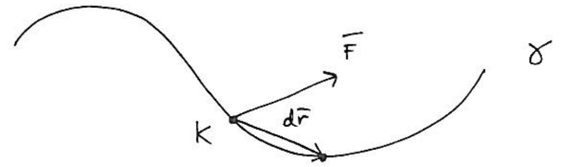
Motivering (fysik): Arbete = kraft · sträcka

Antag att vi drar ett föremål längs marken med kraften $\bar{F}$. Kraftens storlek är $|\bar{F}|$, och i rörelseriktningen är den $|\bar{F}|\cos\theta$. Om vi släpar föremålet vektorn $\bar{r}$, dvs. $|\bar{r}|$ långt, så blir arbetet $W = |\bar{F}|\cos\theta \cdot |\bar{r}| =$



$= \bar{F} \cdot \bar{r}$ (skalärprodukt).

Antag nu att vi har en kurva γ parametriserad av $\bar{r}(t) = (x(t), y(t))$, $a \le t \le b$, och att en partikel K som rör sig längs γ påverkas av en kraft $\bar{F}(\bar{r}(t))$ i punkten $\bar{r}(t)$.



Under en kort tid dt förflyttar sig K ungefär

$d\bar{r} = \frac{d\bar{r}}{dt} \cdot dt = \bar{r}'(t)dt$, och under denna tid

så uträttar kraftfältet arbetet

$$\bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot d\bar{r} = \bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t)\,dt,$$

och över hela kurvan blir arbetet

$$\boxed{W = \int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t)\,dt}$$

Med detta som motivering definierar vi kurvintegralen:

Vektorfält: $\bar{F}(\bar{r}) = (P(\bar{r}), Q(\bar{r})) = (P(x,y), Q(x,y))$

Kurva: $\bar{r}(t) = (x(t), y(t))$, $a \le t \le b$.

Kurvintegral: $\int_\gamma \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t)\,dt$

OBS! $\int_a^b \bar{F}(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t)\,dt =$

$$= \int_a^b \big(P(x(t),y(t)), Q(x(t),y(t))\big) \cdot \big(x'(t), y'(t)\big)\,dt =$$

$$= \boxed{\int_a^b \big(P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\big)\,dt}$$ Formel!

Anm: Kurvintegralen skrivs även $\int_\gamma P\,dx + Q\,dy$,

eftersom $\int_\gamma (Px' + Qy')\,dt = \int_\gamma \left(P\frac{dx}{\cancel{dt}} + Q\frac{dy}{\cancel{dt}}\right)\cancel{dt} =$

$$= \int_\gamma P\,dx + Q\,dy.$$

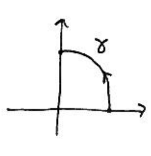
Ex: Beräkna kurvintegralen

$$I = \int_\gamma xy\,dx + (x^2+y^2)\,dy,$$

där γ är enhetscirkeln i positiv led från $(1,0)$ till $(0,1)$.

Lösning: Vi kan parametrisera γ

med $\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$, $t: 0 \to \frac{\pi}{2}$.



Nu har vi $\begin{cases} P(x,y) = xy \\ Q(x,y) = x^2+y^2 \end{cases}$ och $\begin{cases} x'(t) = -\sin t \\ y'(t) = \cos t \end{cases}$, så

$$I = \int_0^{\pi/2} \Big(\cos t \sin t \cdot (-\sin t) + \underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{=1} \cdot \cos t\Big)\,dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} (-\cos t \cdot \sin^2 t + \cos t)\,dt = \left[-\frac{\sin^3 t}{3} + \sin t\right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$$

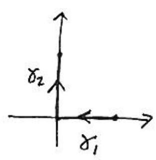
Ex: Samma vektorfält som ovan, men nu är $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$,

där γ_1: räta linjestycket från $(1,0)$ till $(0,0)$

γ_2: — " — $(0,0)$ till $(0,1)$

Lösning: Parametrisering

$\gamma_1: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases}$, $t: 1 \to 0$ $\quad \gamma_2: \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases}$, $t: 0 \to 1$.



$$\Rightarrow I = \int_\gamma = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} = \int_1^0 \big(t \cdot 0 \cdot 1 + (t^2+0^2) \cdot 0\big)\,dt +$$

$$+ \int_0^1 \big(0 \cdot t \cdot 0 + (0^2+t^2) \cdot 1\big)\,dt = \int_0^1 t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Anm: I båda exemplen har vi rört oss från $(1,0)$ till $(0,1)$, men längs olika vägar, och fått olika resultat.

(Återkommer till detta!)