Föreläsning 18 1

Trippelintegraler:

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz,$$

där D är ett område i rummet.

Definieras på motsv. sätt som dubbelintegralen; vi approximerar med "trappfunktioner", funktioner som är konstanta på axelparallella "lådor".

Eftersom vi inte kan rita grafen till f är det svårt att göra en geometrisk tolkning av integralen, men däremot kan vi göra en fysikalisk:

Om K kropp i rummet och $\rho(x,y,z)$ anger densiteten av K i punkten (x,y,z), så är K:s massa

$$\boxed{M = \iiint_K \rho(x,y,z)\,dxdydz}$$

(Motsv. resonemang med Riemannsummor som vi gjorde i en tidigare föreläsning.)

Trix: Genom att sätta densiteten $\rho(x,y,z)=1$ (konstant), så gäller det att massan = volymen!

Vi får alltså

$$\boxed{V = \iiint_K 1\,dxdydz}$$

Alternativt sätt att beräkna en volym!

Upprepad integration fungerar "som vanligt". Vi börjar med att integrera över ett lådformat område:

Ex: Beräkna

$$I = \iiint_D xy^2z^3\,dxdydz,$$

där D: $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1$.

Lösning: $I = \int_0^1\left(\int_0^1\left(\int_0^1 xy^2z^3\,dx\right)dy\right)dz =$

$$= \int_0^1\left(\int_0^1\left[\frac{x^2}{2}y^2z^3\right]_0^1 dy\right)dz = \frac{1}{2}\int_0^1\left(\int_0^1 y^2z^3\,dy\right)dz =$$

3

$$= \frac{1}{2}\int_0^1\left[\frac{y^3}{3}z^3\right]_0^1 dz = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\int_0^1 z^3\,dz =$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{z^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{24}}}$$

Anm: Notera att vi kan se den första integralen som

$$\iint_E\left(\int_0^1 xy^2z^3\,dx\right)dydz,\quad E:\begin{cases}0\le y\le 1\\ 0\le z\le 1\end{cases},$$

dvs. som en "dubbelintegral av en enkelintegral". Alternativt kan vi skriva integralen

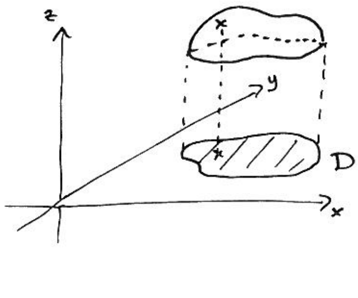
$$\int_0^1\left(\iint_F xy^2z^3\,dxdy\right)dz,\quad F:\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1\end{cases},$$

dvs. som en "enkelintegral av en dubbelintegral".

Ex: Beräkna volymen under ytan

$$z = f(x,y)$$

definierad på D i xy-planet.



7

Lösn.: Vi skall beräkna $V = \iiint_K 1\,dxdydz$, där K ges av: $0\le z\le f(x,y)$, $(x,y)\in D$.

Vi börjar med att integrera i z-led:

$$V = \iint_D\left(\int_0^{f(x,y)} 1\,dz\right)dxdy = \iint_D [z]_0^{f(x,y)}\,dxdy =$$

$$= \iint_D f(x,y)\,dxdy$$

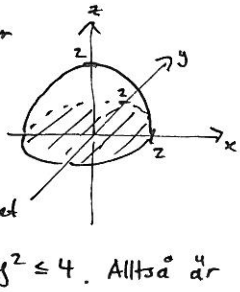
Stämmer med tidigare kapitel!

Ex: Beräkna

$$I = \iiint_D z\,dxdydz,$$

där D är halvklotet $x^2+y^2+z^2\le 4$, $z\ge 0$.

Lösn. 1: Den övre ytan har ekvation $z=\sqrt{4-(x^2+y^2)}$, och den undre $z=0$.



Projicerar vi kroppen i xy-planet så får vi ~~[illegible]~~ cirkelskivan E: $x^2+y^2\le 4$. Alltså är

$$I = \iint_E \left(\int_0^{\sqrt{4-(x^2+y^2)}} z \, dz \right) dx dy =$$

$$= \iint_E \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{\sqrt{4-(x^2+y^2)}} dx dy = \frac{1}{2} \iint_E \left(4 - (x^2+y^2)\right) dx dy =$$

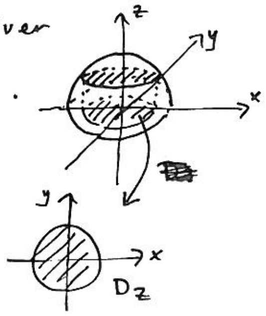
$$= \left[\begin{array}{l} \text{pol. koord.} \\ \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow F: \begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \iint_F (4-r^2) \cdot r \cdot dr = \frac{1}{2} \left(\int_0^{2\pi} 1 \, d\theta \right) \cdot \left(\int_0^2 (4r - r^3) dr \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \left[2r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^2 = \pi (8-4) = \underline{\underline{4\pi}}$$

<u>Lösn. 2:</u> En alternativ beskrivning av kroppen är att z varierar mellan 0 och 2, och för <u>varje z-värde</u> integrerar vi över

$$D_z : \quad x^2 + y^2 \le 4 - z^2 .$$



D_z är cirkel med radie $\sqrt{4-z^2}$

$\Rightarrow$ arean $= \pi(4-z^2)$.

Vi får nu

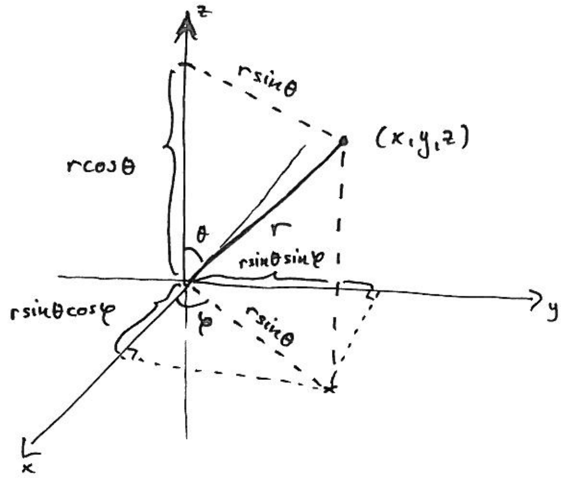
$$I = \int_0^2 \left(\iint_{D_z} z \, dx dy \right) dz = \int_0^2 z \underbrace{\left(\iint_{D_z} 1 \, dx dy \right)}_{= \text{arean av } D_z. \text{ OBS!}} dz =$$

$$= \int_0^2 z \pi (4 - z^2) \, dz =$$

$$= \pi \int_0^2 (4z - z^3) \, dz = \pi \left[2z^2 - \frac{z^4}{4} \right]_0^2 = \underline{\underline{4\pi}}$$

<u>Variabelbyte:</u>

Fungerar som tidigare. Motsvarigheten till polära koordinater i 3 dim. kallas <u>rymdpolära</u> <u>koordinater</u>:



I figuren ser vi att

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

<u>Anm:</u>
φ motsv. <u>longitud</u>
θ motsv <u>latitud</u>
på en jordglob.

där $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$. ← OBS!

Vi beräknar funktionaldeterminanten:

$$\frac{d(x,y,z)}{d(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\theta & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\theta & y'_\varphi \\ z'_r & z'_\theta & z'_\varphi \end{vmatrix} =$$

övning!

$$\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \ldots = \underline{\underline{r^2 \sin\theta}}$$

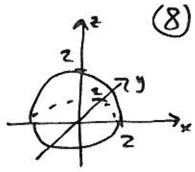
$0 \le \theta \le \pi \Rightarrow r^2 \sin\theta \ge 0$ så abs.belopp behövs ej.

<u>Ex(igen):</u> $I = \iiint_D z \, dx dy dz$, där

D är halvklotet $x^2 + y^2 + z^2 \le 4$, $z \ge 0$.

<u>Lösn. 3:</u> Halvklotet D kan beskrivas

av $G: \begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le \pi/2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$, så



variabelbyte till rymdpolära koordinater ger

$$\underline{I} = \iiint_G r\cos\theta \cdot r^2 \sin\theta \, dr d\theta d\varphi =$$

$$= \left(\int_0^2 r^3 \, dr \right) \cdot \left(\int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \, d\theta \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} 1 \, d\varphi \right) =$$

$$= \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^2 \cdot \left[\frac{\sin^2\theta}{2} \right]_0^{\pi/2} \cdot 2\pi = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \underline{\underline{4\pi}}.$$