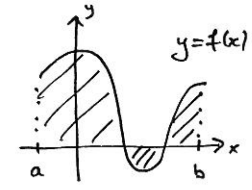
(1)

Föreläsning 15

Dubbelintegraler

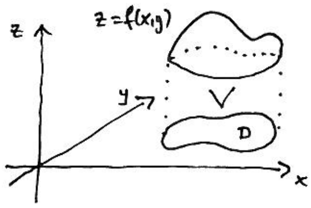
Funktion av en variabel:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{area "med tecken"}$$



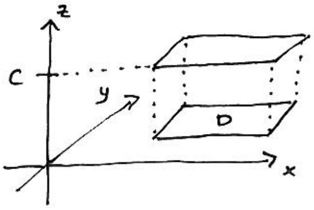
Funktion av två variabler:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \text{volym "med tecken"}$$



Hur definierar man dubbelintegraler?
Antag för enkelhetens skull att området D är en rektangel. Det enklaste fallet är $f(x,y)=C$ där C är en konstant. Vi ska då beräkna volymen av en "låda":

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = C\cdot \text{area}(D)$$

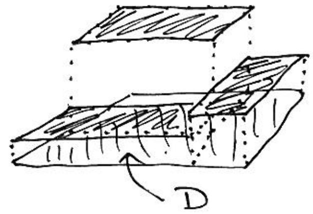


(2)

Näst enklast är då D kan delas in i mindre rektanglar, där $f(x,y)$ är konstant i varje mindre rektangel:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy =$$

= summan av volymerna av "lådorna".



OBS! Om en låda ligger under xy-planet så ger den ett negativt bidrag till integralen.

Funktionen ovan kallas trappfunktion.

Vi säger att en godtycklig funktion $f(x,y)$ är integrerbar på D om volymen under $f(x,y)$ kan approximeras godtyckligt väl med volymer av trappfunktioner, eller mer strikt, om det finns trappfunktioner $\Phi(x,y)$ och $\Psi(x,y)$, sådana att $\Phi(x,y) \le f(x,y) \le \Psi(x,y)$ i D, så att skillnaden $\iint_D \Psi(x,y)\,dxdy - \iint_D \Phi(x,y)\,dxdy$ blir godtyckligt liten.

(3)

Då finns det ett entydigt tal λ med

$$\iint_D \Phi(x,y)\,dxdy \le \lambda \le \iint_D \Psi(x,y)\,dxdy$$

för alla Φ och Ψ.

Def: $\lambda = \iint_D f(x,y)\,dxdy$ är integralen av f över D

Anm: Det går att utvidga definitionen till att hantera fallet då D ej rektangel.

De (naturliga) räknereglerna för integraler ((1)–(5), s. 230–231) kan nu visas (kolla igenom att de verkar rimliga), och dessa gäller för allmänna funktioner också, inte bara trappfunktioner.

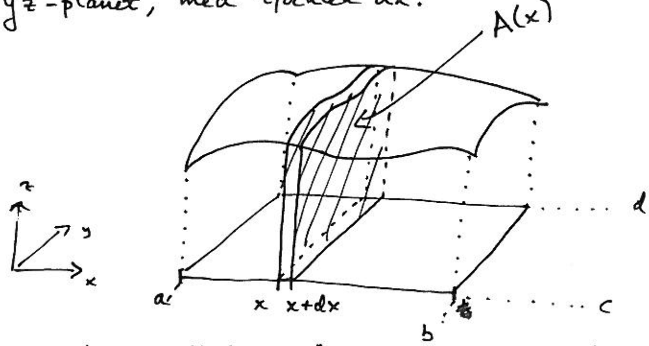
Hur beräknar man en dubbelintegral (i fallet då D rektangel)?

Samma princip som i endimfallet:
Integral = "summa av ∞ många ∞ små bitar"

För att beräkna $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ skivar

(4)

vi volymen i tunna skivor, parallella med yz-planet, med tjocklek dx:



Om dx är litet så är volymen av en skiva $dV = A(x)\,dx$. Summera nu dessa volymer:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b A(x)\,dx$$

(För att få alla skivor låter vi x variera mellan a och b.)

För varje x-värde beräknas $A(x)$ som en (enkel)integral i y-led: $A(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$

Vi får (Sats 2, s. 235)

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx}$$

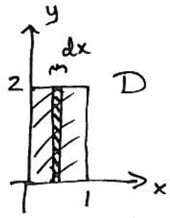
En dubbelintegral beräknas alltså genom att beräkna två enkelintegraler "efter varandra". 5

Motsvarande formel gäller om vi "skär" i omvänd ordning (dvs. i skivor parallella med xz-planet).

Ex: Beräkna $I=\iint_D x^3y^2\,dxdy$, där D ges av $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2$.

Lösning:

$$I=\int_0^1\left(\int_0^2 x^3y^2\,dy\right)dx=$$



$$=\int_0^1\left[x^3\cdot\frac{y^3}{3}\right]_0^2dx=\int_0^1\frac{8x^3}{3}dx=\left[\frac{8}{3}\cdot\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{8}{3\cdot4}=\frac{2}{3},$$

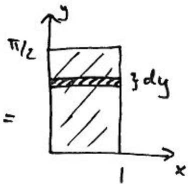
alternativt $I=\int_0^2\left(\int_0^1 x^3y^2\,dx\right)dy=$

$$=\int_0^2\left[\frac{x^4}{4}\cdot y^2\right]_0^1dy=\int_0^2\frac{y^2}{4}dy=\left[\frac14\cdot\frac{y^3}{3}\right]_0^2=\frac{8}{4\cdot3}=\frac{2}{3}.\ \square$$

Ibland blir det en enklare primitiv på ett av hållen; då börjar man med det hållet:

Ex: Beräkna $I=\iint_D y\cos(xy)\,dxdy$, $D:\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le \frac{\pi}{2}\end{cases}$. 6

Lösn.: $I=\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^1 y\cos(xy)\,dx\right)dy=$



$$=\int_0^{\pi/2}\left[\sin(xy)\right]_0^1dy=\int_0^{\pi/2}(\sin y-\overset{0}{\sin 0})\,dy=$$

$$=\left[-\cos y\right]_0^{\pi/2}=0-(-1)=\underline{\underline{1}}.$$

(Prova gärna att göra det åt andra hållet!)

Vi kan som vanligt "flytta ut" alla konstanter i en integral:

Ex: Beräkna $I=\iint_D xye^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$, $D:\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1\end{cases}$.

Lösn.: $I=\int_0^1\left(\int_0^1 \underbrace{xe^{-x^2}}\cdot ye^{-y^2}\,dy\right)dx=$

betraktas som konstant då vi integrerar m.a.p. y.

$$=\int_0^1 xe^{-x^2}\cdot\underbrace{\left(\int_0^1 ye^{-y^2}dy\right)}\,dx=$$

konstant!

$$=\left(\int_0^1 ye^{-y^2}dy\right)\cdot\left(\int_0^1 xe^{-x^2}dx\right)=I_1\cdot I_2$$

$$I_1=I_2=\int_0^1 xe^{-x^2}dx=\left[-\frac12e^{-x^2}\right]_0^1=-\frac12e^{-1}-\left(-\frac12\right)=$$ 7

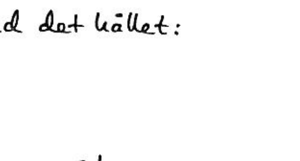
$$=\frac12-\frac{1}{2e}\quad\Rightarrow\quad I=I\cdot I_2=\underline{\underline{\left(\frac12-\frac{1}{2e}\right)^2}}.$$

Integration över godtyckliga områden D:

Vi gör "som vanligt", men beskriver nu området med hjälp av integrationsgränserna, som nu inte alltid är konstanter.

Ex: Beräkna $I=\iint_D\frac{y}{1+x}\,dxdy$ då D är triangeln med hörn i $(0,0)$, $(0,1)$ o $(1,0)$.

Lösning: Rita området!



Om vi först integrerar i y-led, så skall y variera mellan 0 och $1-x$. Sedan låter vi x variera mellan 0 och 1. Vi får

$$I=\int_0^1\left(\int_0^{1-x}\frac{y}{1+x}dy\right)dx=\int_0^1\left[\frac{1}{1+x}\cdot\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x}dx=$$

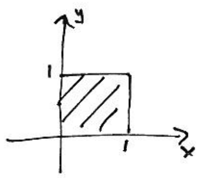
$$=\int_0^1\frac{(1-x)^2}{2(1+x)}dx\overset{\text{pol.div.}}{=}\int_0^1\frac12\left(x-3+\frac{4}{x+1}\right)dx=$$

$$=\frac12\left[\frac{x^2}{2}-3x+4\ln|x+1|\right]_0^1=\frac12\left(\frac12-3+4\ln2-\overset{0}{\ln 1}\right)=\underline{\underline{2\ln2-\frac54}}.$$

Alternativt kan vi beräkna $\int_0^1\left(\int_0^{1-y}\frac{y}{1+x}dx\right)dy$. 8

OBS! Ett par sätt att räkna fel är:

- $\int_0^1\left(\int_0^1\frac{y}{1+x}dy\right)dx$ som ger integralen över hela kvadraten!

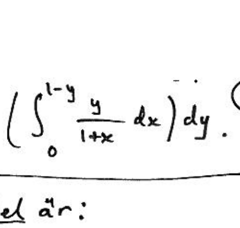


- $\int_0^{1-x}\left(\int_0^1\frac{y}{1+x}dx\right)dy$ som är meningslöst, då resultatet blir en funktion av x (ska bli ett tal!).

Ex: Beräkna $I=\iint_D xy\,dxdy$ om $D:\ x^2\le y\le x$.

Lösn.: Rita först D!

Integrerar vi i y-led först så får vi



$$I=\int_0^1\left(\int_{x^2}^{x}xy\,dy\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left[\frac{xy^2}{2}\right]_{x^2}^{x}dx=\frac12\int_0^1(x^3-x^5)\,dx=\frac12\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{6}\right]_0^1=$$

$$=\frac12\left(\frac14-\frac16\right)=\frac12\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{24}.$$

OBS! (invers-funkt.)

Om x-led först, så $\int_0^1\left(\int_y^{\sqrt{y}}xy\,dx\right)dy=\ldots\ldots$