4. OPTIMERING

(1)

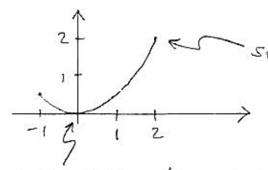
Problem: Finn största/minsta värdet av en reellvärd funktion $f(x,y)$ då $(x,y) \in K \subseteq \mathbb{R}^2$ (ev. fler variabler $(x,y,z,\ldots)$)

[tillverkningsindustrin: bil, mobil; företagsekonomi; etc.]

4.1 Optimering på kompakt K

Enligt Sats 4, kap 1.6, har en kontinuerlig funktion f ett största och ett minsta värde på en kompakt (= sluten och begränsad) mängd K.

Ex. $f(x) = \frac{x^2}{2}$ $K = \{x \in \mathbb{R} : -1 \le x \le 2\}$ kompakt intervall

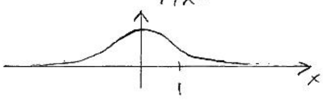


största värde finns på randen

minsta värde finns i en inre punkt

Ex. $f(x) = \frac{x^2}{2}$ (som ovan) $-1 \le x < 2$ ej slutet intervall $\therefore$ ej kompakt

Ex. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $x \in \mathbb{R}$ ej begränsad def. mängd



OH

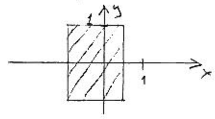
(2)

Generell metod för kompakt $K \subseteq \mathbb{R}^2$

1) Undersök det inre av K   OH
   Stationära punkter: lös $\nabla f = (0,0)$
2) Undersök randen av K
   a) "kanterna": parametrisera
   b) "hörnen"

Ex. $f(x,y) = x e^{-x^2-y^2}$, $K = \{(x,y) : -1 \le x \le \frac{1}{2}, |y| \le 1\}$

OH



* Det inre av K   Stationära punkter

$$\nabla f = (0,0) \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = e^{-x^2-y^2} + x(-2x)e^{-x^2-y^2} = (1-2x^2)e^{-x^2-y^2} = \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -2y\, e^{-x^2-y^2} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = 0 \end{cases}$$

Endast $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \in K$ och $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \boxed{-\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}}}$

* Randen (4 kanter, 4 hörn)

$\underline{y=-1}$: $g_1(x) = f(x,-1) = x e^{-x^2-1}$ $-1 \le x \le \frac{1}{2}$

(envariabelproblem)

$$g_1'(x) = e^{-x^2-1} + x(-2x)e^{-x^2-1} = (1-2x^2)e^{-x^2-1} = 0$$

$$\Longrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{och} \quad g_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}-1} = \boxed{-\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-3/2}}$$

(3)

$\underline{y=1}$: $g_2(x) = f(x,1) = x e^{-x^2-1}$

som ovan får vi $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ och $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) = \boxed{-\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-3/2}}$

$\underline{x=\frac{1}{2}}$: $g_3(y) = f\left(\frac{1}{2}, y\right) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{4}-y^2}$ $-1 \le y \le 1$

$$g_3'(y) = \frac{1}{2}(-2y)\, e^{-\frac{1}{4}-y^2} = 0$$

$$\longrightarrow y = 0 \quad \text{och} \quad g_3(0) = f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \boxed{\frac{1}{2} e^{-1/4}}$$

$\underline{x=-1}$: $g_4(y) = f(-1,y) = -e^{-1-y^2}$

$$g_4'(y) = +2y\, e^{-1-y^2} = 0$$

$$\Longrightarrow y = 0 \quad \text{och} \quad g_4(0) = f(-1,0) = \boxed{-e^{-1}}$$

Hörnen:

$f(-1,1) = \boxed{-e^{-2}}$

$f(-1,-1) = -e^{-2}$

$f\left(\frac{1}{2}, -1\right) = \frac{1}{2} e^{-1/4-1} = \boxed{\frac{1}{2} e^{-5/4}}$

$f\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \frac{1}{2} e^{-5/4}$

Jämför de inrutade talen

Positiva:

$\frac{1}{2} e^{-1/4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e}\right)^{1/4}$ ← störst

$\frac{1}{2} e^{-5/4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^5}\right)^{1/4}$

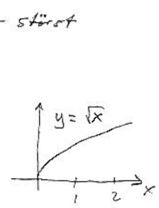
Negativa: skippa minustecknen

semifinaler

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{e}\right)^{1/2} \leftarrow \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-3/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{e^3}\right)^{1/2} \end{cases}$$

final

$$\begin{cases} e^{-1} = \frac{1}{e} \leftarrow \\ e^{-2} = \frac{1}{e^2} \end{cases}$$

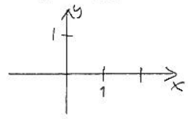


(4)

SVAR: Största värde är $\frac{1}{2} e^{-1/4}$ i punkten $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Minsta värde är $-\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2}$ i punkten $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

Ex. Bestäm största och minsta värdet av $f(x,y) = x e^{-x^2-y^2}$ på cirkelskivan $(x-1)^2 + y^2 \le 1$ samt ange max- och minpunkterna



OH

Det inre av området: stationära punkter (har vi bestämt tidigare)

Innanför cirkeln: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ och $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2}}$

Randen: parametrisera cirkeln

$$g(t) = f(1+\cos t, \sin t) = (1+\cos t)\, e^{-(1+\cos t)^2 - \sin^2 t} =$$
$$= (1+\cos t)\, e^{-(1+2\cos t+\cos^2 t) - \sin^2 t} =$$
$$= (1+\cos t)\, e^{-2-2\cos t}$$
$$g'(t) = -\sin t\, e^{-2-2\cos t} + (1+\cos t)\, 2\sin t\, e^{-2-2\cos t} =$$
$$= e^{-2-2\cos t}(-\sin t + 2\sin t + 2\cos t \sin t) =$$
$$= e^{-2-2\cos t}(\sin t + 2\cos t \sin t) =$$
$$= e^{-2-2\cos t} \sin t\, (1 + 2\cos t) = 0$$

Antingen $\sin t = 0 \Rightarrow t = 0$ eller $t = \pi$

$g(0) = \boxed{2e^{-4}}$ $g(\pi) = \boxed{0}$

Obs $g(0) = f(\quad)$ $g(\pi) = f(\quad)$

Eller $1+2\cos t=0 \iff \cos t=-\frac{1}{2}$

$\iff t=\frac{2\pi}{3}$ eller $t=\frac{4\pi}{3}$ [enhetscirkeln!]

$g\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)e^{-2+1}$ | $g\left(\frac{4\pi}{3}\right)=$

$=\boxed{\frac{1}{2}e^{-1}}$

Obs $g\left(\frac{2\pi}{3}\right)=f\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ | $g\left(\frac{4\pi}{3}\right)=f\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Jämför de inrutade talen.

$2<e<3$

$\frac{1}{3}<\frac{1}{e}<\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3^4}<\frac{1}{e^4}<\frac{1}{2^4}$

$\frac{2}{3^4}<\boxed{\frac{2}{e^4}}<\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}=\frac{1}{2\cdot 4}$

$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{2e}}$

$\frac{1}{2}e^{-1}=\frac{1}{2e}$

Alltså $0<\frac{2}{e^4}<\frac{1}{2e}<\frac{1}{\sqrt{2e}}$

Svar: Minsta värdet är 0 i $(0,0)$

Största värdet är $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}$ i $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$

Alternativ till att parametrisera randen:

$\min f(x,y)=xe^{-x^2-y^2}$

då $(x-1)^2+y^2=1$ (likhetsbivillkor)

Lös ut en variabel ur bivillkoret och stoppa in i f:

$y^2=1-(x-1)^2=1-(x^2-2x+1)=2x-x^2$

$y=\pm\sqrt{2x-x^2}$

ger $g(x)=f(x,\pm\sqrt{})=xe^{-x^2-(2x-x^2)}=xe^{-2x}$

$0\le x\le 2$

Envariabelproblem: stationära punkter

$g'(x)=e^{-2x}+x(-2)e^{-2x}=$

$=e^{-2x}(1-2x)=0 \iff x=\frac{1}{2},\ g\left(\frac{1}{2}\right)=\boxed{\frac{1}{2}e}$

Då är $y=\pm\sqrt{\frac{3}{4}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Randen: $g(0)=\boxed{0}$ ← Samma som tidigare

$g(2)=\boxed{2e^{-4}}$ ←

4.2 Optimering på icke-kompakt område

Ex. Bestäm, om möjligt, största samt minsta värde av

$$f(x,y)=xe^{-x^2-y^2} \quad \text{då } (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

Lös: Vad händer långt borta? Faktorn $e^{-(x^2+y^2)}$ blir liten långt borta. Hur kan man uttrycka detta med en variabel?

Polära koordinater: $\begin{cases} x=r\cos\theta & r\ge 0\\ y=r\sin\theta & 0\le\theta<2\pi \end{cases}$

"Långt borta" = " "

$$|f(x,y)|=|f(r\cos\theta,r\sin\theta)|=|r\cos\theta\, e^{-r^2}|=$$

$$=r\underbrace{|\cos\theta|}_{\le 1}e^{-r^2}\le re^{-r^2}\to 0 \quad \text{då } r\to\infty$$

Alltså: $|f(x,y)|$ är väldigt litet långt borta oberoende av θ, dvs på och utanför en cirkel $x^2+y^2=R^2$ med stor radie R.

Då kan vi optimera f på $K=\{(x,y): x^2+y^2\le R^2\}$ som är kompakt! Max/min antas i de stationära punkt

se sid 2