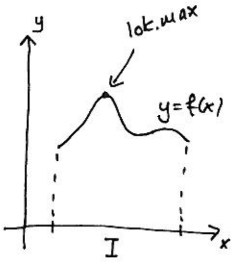
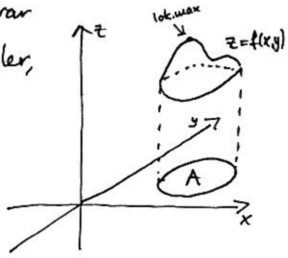
Föreläsning 1

(1)

- I <u>envariabelanalys</u> studerade vi funktioner $f(x)$ av <u>en</u> variabel ($f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$). Grafen blir en kurva.



- I <u>flervariabelanalys</u> studerar vi funktioner av <u>flera</u> variabler, t.ex. $f(x,y)$ ($f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$). Grafen blir en yta.



Under kursen kommer vi successivt att "översätta" begreppen gränsvärde, derivata och integral till funktioner av flera variabler.

T.ex. <u>arean</u> = integralen av $f(x)$ över <u>intervallet</u> I

<u>volymen</u> = integralen av $f(x,y)$ över <u>området</u> A i xy-planet.

Innan vi börjar göra detta måste vi få "koll" på delmängder av $\mathbb{R}^2$ (som A ovan) samt delmängder av $\mathbb{R}^3$.

Delmängder av $\mathbb{R}^2$:

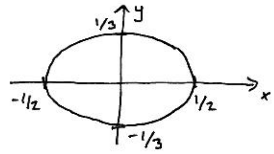
(2)

Huvudknep: Studera koordinataxlarna!

<u>Ex:</u> Hur ser <u>ellipsen</u> $4x^2+9y^2=1$ ut?

<u>Lösning:</u> <u>x-axeln</u> har ekvation $y=0$. Med $y=0$ får vi $4x^2=1 \iff x=\pm\frac{1}{2}$.

<u>y-axeln</u> har ekvation $x=0$, vilket ger $9y^2=1 \iff y=\pm\frac{1}{3}$.



<u>Alt:</u> $4x^2+9y^2=1 \iff \frac{x^2}{1/4}+\frac{y^2}{1/9}=1$

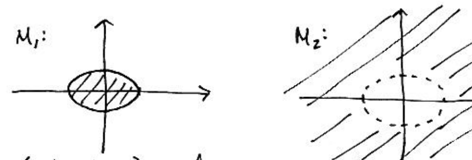
$\iff \frac{x^2}{(1/2)^2}+\frac{y^2}{(1/3)^2}=1$

halvaxlar

Välbekant formel? $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$

<u>Ex:</u> Rita mängderna $M_1=\{(x,y) \mid 4x^2+9y^2\le 1\}$ och $M_2=\{(x,y) \mid 4x^2+9y^2>1\}$

<u>Lösning:</u> M_1: M_2:



<u>randen</u> (=kanten) med — randen ej med

<u>Anm1:</u> Rita först ut randen (dvs. med likhet i olikheten). (3)

<u>Anm2:</u> Här var det lätt att kolla vad som är "insida/utsida". Annars prova en punkt, t.ex. origo $(x,y)=(0,0)$. Denna uppfyller villkoret i M_1, men ej villkoret i M_2.

<u>Övning:</u> Rita <u>hyperbeln</u> $4x^2-9y^2=1$!

(Vilken axel skär denna hyperbel? Vilka är skärningspunkterna?)

Terminologi för mängder:

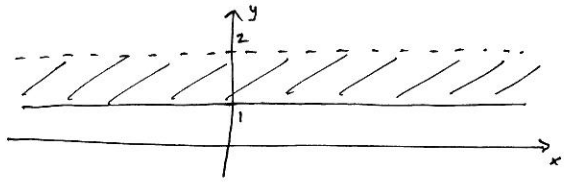
Läs igenom s.10-15 själva! Tänk efter vad begreppen "egentligen" betyder genom att rita egna figurer.

<u>Ex:</u> Betrakta M_1 och M_2 ovan!

- Ellipsen är <u>rand</u> till både M_1 och M_2.
- M_1 är ett exempel på en <u>sluten</u> mängd. (sluten = den innehåller hela sin rand) Den är också <u>begränsad</u>. En sluten, begränsad mängd kallas <u>kompakt</u>.
- M_2 är ett exempel på en <u>öppen</u> mängd. (öppen = innehåller inte någon del av sin rand) Den är dessutom <u>ej begränsad</u>
- M_1 och M_2 är varandras <u>komplement</u>.

<u>Ex:</u> Mängden $M_3=\{(x,y) \mid 1\le y<2\}$ är <u>varken</u> öppen <u>eller</u> sluten. (4)

OBS! Inget villkor på x



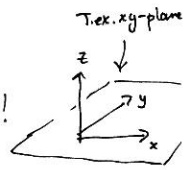
För det mesta funkar intuitionen, men ibland måste man gå tillbaka till definitionerna:

<u>Övning (överkurs):</u> $M=\{x \mid x\in\mathbb{Q},\ 0<x<1\}\subseteq\mathbb{R}$.

Är denna sluten? öppen? (Vad är randen?)

Delmängder av $\mathbb{R}^3$:

Huvudknep: Studera koordinatplanen!



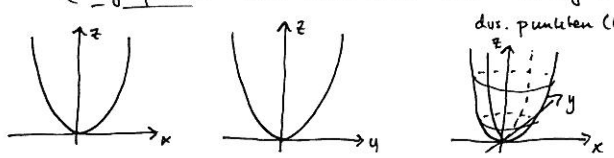
<u>Ex:</u> Rita alla punkter (x,y,z) som uppfyller

$$z=x^2+y^2 \quad !$$

<u>Lösning:</u> <u>xz-planet</u> har ekv. $y=0 \Rightarrow z=x^2$

<u>yz-planet</u> har ekv. $x=0 \Rightarrow z=y^2$

(<u>xy-planet</u> har ekv. $z=0 \Rightarrow x^2+y^2=0$ dvs. punkten $(0,0,0)$)



(5)

Vi får en "skål", roterad kring z-axeln. Kallas paraboloid.

Allmänt gäller att varje mängd med ekvation

$$z = f(r) \quad \text{där} \quad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

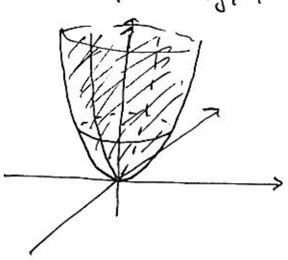
är rotationssymmetrisk på detta sätt.

Ex: Rita mängden $z \geq x^2+y^2$.

Lösning: Inuti eller utanför skålen ovan?

$z \geq x^2+y^2$ sant för $(x,y,z) = (0,0,1)$

$\Rightarrow$

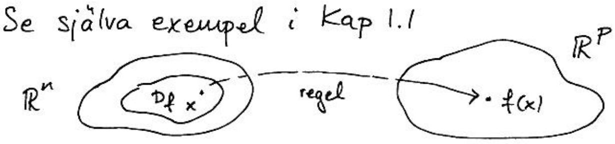


"inuti"!

Funktioner $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$:

En funktion f består av en definitionsmängd D_f (delmängd av $\mathbb{R}^n$) och en regel.

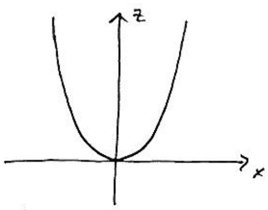
Se själva exempel i Kap 1.1



Ex: Rita grafen till $z = f(x,y) = x^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. (7)

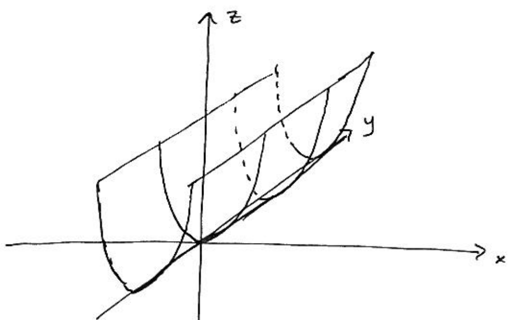
Lösning: y "saknas" i funktionsregeln $\Rightarrow$ grafen är likadan för alla y-värden, dvs. likadan i alla plan $y = C$ (konstant).

T.ex. i planet $y = 0$:



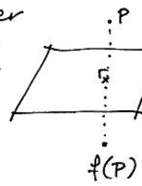
Upprepa nu denna kurva i varje plan $y = C$.

Vi får en "ränna" (parabolisk cylinder):



(6)

Ex: Spegling av rummets punkter i ett plan är en funktion $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.



Vi kan inte rita grafen för en sådan funktion, men det går för funktioner $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Vi har tidigare sett att det blir en yta.

Ex: Rita grafen till $z = f(x,y) = \sqrt{9-(x^2+y^2)}$ med definitionsmängden $D_f: 0 \leq x^2+y^2 \leq 9$.

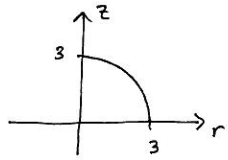
Lösning: Vi ser att $z = \sqrt{9-r^2}$ där $r = \sqrt{x^2+y^2}$

$\Rightarrow$ rotationssymmetri kring z-axeln.

Rita först "z-r"-grafen:

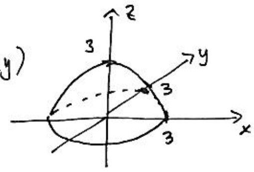
$$\begin{cases} z = \sqrt{9-r^2} \\ 0 \leq r \leq 3 \end{cases} \iff \begin{cases} r^2+z^2 = 9 \\ z \geq 0,\ 0 \leq r \leq 3 \end{cases}$$

dvs. en kvartscirkel!



Rotera sedan denna:

$z = f(x,y)$



dvs. en halvsfär!