Instuderingsfrågor för Endimensionell analys B2 för V,W 2010

Anvisningar

Avsikten med följande frågor är att hjälpa dig med självkontroll av dina kunskaper. Om du känner dig osäker på svaren bör du slå upp motsvarande avsnitt i läroboken och läsa på ytterligare en gång. Många frågor börjar med orden “Vad menas med att”. Denna fras betyder precis detsamma som frasen “Ge definitionen av att”. Kontrollera gärna med övningsledare och föreläsare om dina svar på frågorna kan anses vara tillfredsställande.

Kapitel 6

1. Definiera följande tre beteckningar för komplexa tal z: $|z|$, $\bar{z}$ och $\arg z$.
2. Hur tolkas följande operationer i det komplexa talplanet
   a) att ta absolutbelopp av z, b) att konjugera z, c) att addera w till z, d) att multiplicera z med w?
3. Skriv upp och bevisa formler för $\overline{zw}$ och $|zw|$. Vad gäller för $|z+w|$?
4. Hur skriver man kvoten mellan två komplexa tal på rektangulär form?
5. Definiera beteckningen e^{ix}, där x är ett reellt tal.
6. Hur gör du för att skriva ett komplext tal $a+ib$ på polär form?
7. Hur gör du omvänt, skriver ett polärt framställt tal $re^{i\theta}$ på rektangulär form $a+ib$?
8. Skriv upp och härled Eulers formler.
9. Visa att $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$ för alla reella tal x och y. Vad säger de Moivres formel?
10. Hur löser du en andragradsekvation med komplexa koefficienter?
11. Ange två metoder för att lösa andragradsekvationen $z^2 = w$, där w är ett givet komplext tal.
12. Hur löser du ekvationen $z^n = w$, där w är ett givet komplext tal?
13. Vad säger algebrans fundamentalsats? Visa att varje komplext polynom kan faktoriseras i (komplexa) förstagradsfaktorer.
14. Antag att polynomet $p(x)$ har reella koefficienter. Visa att om $p(\alpha) = 0$ så är även $p(\bar{\alpha}) = 0$.
15. Visa att att varje reellt polynom kan faktoriseras i reella faktorer av högst graden två.

Kapitel 11

16. Skriv upp Maclaurins formel med Lagranges restterm.
17. För vilka x är Maclaurinpolynomet $p_n(x)$ en god approximation av $f(x)$?
    Varför vill man approximera med polynom?

18. Hur avgör man hur noggrann approximationen i föregående fråga är?

19. Skriv upp Taylors formel (utveckling kring $x = a$) med Lagranges restterm.

20. Skriv upp standardutvecklingarna (11.5)–(11.10) i läroboken.

21. Visa med Maclaurinutveckling att $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ för varje $x \in \mathbb{R}$. (Använd gränsvärdet $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.)

Kapitel 12

22. Vad menas med uttrycket "F är en primitiv funktion till f i intervallet I"?

23. Bevisa att om F och G är primitiver till samma funktion f, så är $G(x) = F(x) + C$, där C är en konstant.

24. Lär dig de "elementära primitiva funktionerna" på sid. 273 i boken.

25. Skriv upp och bevisa formeln för partialintegration. Ange även ett exempel där det är lämpligt att använda partialintegration.

26. Hur utför man variabelbyte när man bestämmer en primitiv funktion? Vilken deriveringsregel ligger bakom?

27. Beskriv ansatsprinciperna vid partialbråksuppdelning samt hur man bestämmer ansatskoefficienterna.

Kapitel 13

28. Vad är en Riemannsumma till en kontinuerlig funktion f i intervallet $[a, b]$? Förklara ingående beteckningar med hjälp av en figur. Vad händer då indelningen förfinas?

29. Lär dig räknelagarna för integraler (13.8)–(13.11) i läroboken.

30. Formulera triangelolikheten för integraler. Troliggör med en skiss.

31. Formulera integralkalkylens medelvärdessats och förklara den med hjälp av en figur.

32. Formulera och bevisa analysens huvudsats med hjälp av integralkalkylens medelvärdessats.

33. Låt f vara kontinuerlig i $a \le x \le b$. Använd huvudsatsen för att bevisa insättningsformeln

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

där F är en (godtycklig) primitiv till f.

34. Vad menas med uttrycket "den generaliserade integralen $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ är konvergent"?

35. På vilka sätt kan integraler vara generaliserade? Hur beräknar man dem (om de är konvergenta)?

36. För vilka α är följande generaliserade integraler konvergenta:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx, \qquad \int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx.$$

37. Hur lyder jämförelsesatsen för generaliserade integraler av formen $\int_a^\infty f(x)\,dx$? Illustrera med en figur.

38. Hur kan $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ uppskattas med en integral av f, om f är en avtagande (växande) funktion. Rita figur.

Kapitel 14

39. Hur beräknar man arean av området mellan två funktionskurvor?

40. Förklara den s.k. skivformeln

$$\int_a^b A(x)\,dx$$

för volymen av en kropp.

41. Då grafen $y = f(x)$, $a \le x \le b$, roterar kring x-axeln uppstår en rotationskropp (alternativt rotationsyta). Förklara dels hur man kan få fram en beräkningsformel för volymen av kroppen, dels hur man kan få fram en beräkningsformel för den uppkomna rotationsytans area.

42. Kontrollera att du i tyngdpunktsberäkningar förstår hur symboliska integraler som $\int_K x\,dm$ ska översättas till vanliga integraler. Vad betyder x och dm?

43. Ange formeln för längden av en kurva i planet som a) ges på parameterform b) är en graf till en funktion f.

Kapitel 15

44. Vad menas med en lösning till en differentialekvation? Visa att $y = e^{x^2}$ är en lösning till $y'' - 2xy' - 2y = 0$.

45. Hur löser man en differentialekvation av formen
a) $y' + g(x)y = h(x)$? b) $g(y)y' = h(x)$?

46. Visa att den allmänna lösningen till differentialekvationen $y' = ay$ är $y = Ce^{ax}$.

47. Hur löser du en integralekvation av t.ex. formen

$$y(x) = \int_0^x f(t)y(t)\,dt\ ?$$

48. Vad betyder y_h respektive y_p i framställningen $y = y_h + y_p$ av lösningarna till en differentialekvation av formen $y'' + a(x)y' + b(x)y = g(x)$.

49. Ange y_h i föregående uppgift om a och b är konstanter. Vilka olika fall måste särskiljas?

50. Ange alla y_h i föregående uppgift *på reell form* om a och b är reella konstanter.

51. Hur hittar du y_p när $g(x)$ är av formen
    a) konstant,
    b) polynom,
    c) polynom $\cdot e^{\alpha x}$,
    d) polynom $\cdot \cos \beta x$ (alternativt $\sin \beta x$),
    e) en summa av funktioner av ovanstående form?

52. Ange den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y'' + \omega^2 y = 0.$$

    Ge en fysikalisk tolkning av resultatet.

53. Vad menas med resonans, och när kan resonans uppträda?