Föreläsning 9

Insättningsformeln:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad \left(= \Big[F(x)\Big]_a^b \right)$$

Partialintegration och variabelbyte

Ex 1: Beräkna $\int_1^e x\ln x\,dx$.

$$\int x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C. \quad \text{Nu får vi}$$

$$\int_1^e x\ln x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2}{2}\overset{=1}{\ln e} - \frac{e^2}{4} -$$

$$- \left(\frac{1}{2}\overset{=0}{\ln 1} - \frac{1}{4}\right) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(e^2+1).$$

Alt. $$\int_1^e x\ln x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \frac{e^2}{2}\overset{=1}{\ln e} - \frac{1}{2}\overset{=0}{\ln 1} - \int_1^e \frac{x}{2}\,dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e =$$

$$= \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}(e^2+1)$$

□

Ex (ii): Beräkna $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$.

$$\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \begin{bmatrix} t = e^x \\ \Rightarrow \frac{dt}{dx} = e^x \Rightarrow dt = e^x\,dx \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{1}{1+t}\,dt = \ln|1+t| + C = \ln(1+e^x) + C$$

Detta ger $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \Big[\ln(1+e^x)\Big]_0^1 =$

$$= \ln(1+e) - \ln 2 = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right).$$

Alt. $$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \begin{bmatrix} t = e^x,\ dt = e^x\,dx \\ x=0 \text{ ger } t = e^0 = 1 \\ x = 1 \text{ ger } t = e^1 = e \end{bmatrix} =$$

$$= \int_1^e \frac{1}{1+t}\,dt = \Big[\ln|1+t|\Big]_1^e = \ln(1+e) - \ln 2 =$$

$$= \ln\left(\frac{1+e}{2}\right) \quad \text{D.}$$

Observation: Insättning i formeln kan ske samtidigt med partialintegration/variabelbyte.

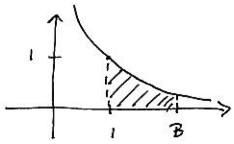
Generaliserade integraler:

Hittills: Integraler på begränsade intervall $[a,b]$ och begränsade funktioner $f(x)$.

Nu: Obegränsade intervall (t.ex. $[a,\infty[$) och obegränsade funktioner $f(x)$. Detta kallas generaliserade integraler

Obegränsat intervall:

Ex: Beräkna $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$.



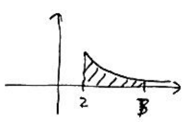
Vi beräknar $\int_1^B \frac{1}{x^2}\,dx$.

$$\int_1^B \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^B = -\frac{1}{B} + 1. \quad \text{Detta ger}$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{B\to\infty} \int_1^B \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{B\to\infty}\left(-\frac{1}{B}+1\right) = 1$$

Svar: $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1$.

Ex: Beräkna $\int_2^\infty \frac{1}{x\ln x}\,dx$.



Vi beräknar först $\int_2^B \frac{1}{x\ln x}\,dx$:

$$\int_2^B \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int_2^B \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln x}\,dx = \Big[\ln|\ln x|\Big]_2^B =$$

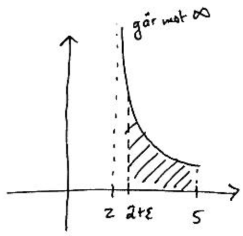
$$= \ln|\ln B| - \ln|\ln 2| \to \infty \text{ då } B\to\infty \quad \text{Problem?}$$

Def: Om gränsvärdet $\lim_{B\to\infty}\int_a^B f(x)\,dx \ (= E)$ existerar (ändligt) sägs den generaliserade integralen $\int_a^\infty f(x)\,dx$ vara konvergent med värdet E. Annars sägs integralen vara divergent.

Anm: På motsv. sätt: $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{A\to-\infty}\int_A^b f(x)\,dx$.

Obegränsad funktion:

Ex: $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx$.



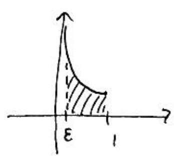
Vi beräknar $\int_{2+\varepsilon}^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx$:

$$\int_{2+\varepsilon}^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx = \Big[2\sqrt{x-2}\Big]_{2+\varepsilon}^5 = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{\varepsilon} \to 2\sqrt{3}$$

då $\varepsilon \to 0^+$

Så $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx = 2\sqrt{3}$ (konvergent)

Ex: $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$.



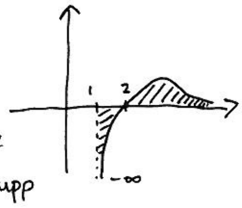
Vi beräknar $\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2}\,dx$.

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_\varepsilon^1 = -1+\frac{1}{\varepsilon} \to \infty \text{ då } \varepsilon\to 0^+,$$

dvs. $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$ är divergent.

Integraler generaliserade på flera sätt:

Ex: $\int_1^\infty \frac{\ln(x-1)}{x^2}\,dx$.



Denna är generaliserad både i 1 och ∞. Vi delar därför upp integralen i två delar: t.ex.

$$\int_1^\infty \frac{\ln(x-1)}{x^2}\,dx = \int_1^2 \frac{\ln(x-1)}{x^2}\,dx + \int_2^\infty \frac{\ln(x-1)}{x^2}\,dx$$

Integralen är konvergent om båda integralerna i högerledet är konvergenta (och divergent annars).

$$\int \frac{\ln(x-1)}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\ln(x-1) + \int \frac{1}{x(x-1)}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{x}\ln(x-1) + \int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)dx = -\frac{1}{x}\ln(x-1) +$$

$$+\ln|x-1| - \ln|x| + C = -\frac{1}{x}\ln(x-1) + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C$$

Detta ger

$$\int_2^B \frac{\ln(x-1)}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\ln(x-1) + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|\right]_2^B =$$

$$= -\frac{1}{B}\ln(B-1) + \ln\left|\frac{B-1}{B}\right| + \frac{1}{2}\underbrace{\ln 1}_{\to 0} - \ln\frac{1}{2} =$$

$$= -\underbrace{\frac{\ln(B-1)}{B}}_{\to 0} + \underbrace{\ln\left|1-\frac{1}{B}\right|}_{\to \ln 1 = 0} + \ln 2 \xrightarrow{(*)} \ln 2 \text{ då } B\to\infty$$

$$\boxed{(*)\quad \frac{\ln(B-1)}{B} = \frac{\ln(B-1)}{B-1}\cdot\frac{B-1}{B} = \underbrace{\frac{\ln(B-1)}{B-1}}_{\to 0}\cdot\underbrace{\left(1-\frac{1}{B}\right)}_{\to 1} \to 0 \text{ då } B\to\infty}$$

Vidare $\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{\ln(x-1)}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\ln(x-1) + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|\right]_{1+\varepsilon}^2 =$

$$= -\frac{1}{2}\underbrace{\ln 1}_{0} + \ln\frac{1}{2} + \frac{1}{1+\varepsilon}\ln\varepsilon - \ln\left|\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right| =$$

$$= -\ln 2 + \left(\frac{1}{1+\varepsilon}-1\right)\ln\varepsilon + \ln(1+\varepsilon) =$$

$$= -\ln 2 - \underbrace{\frac{\varepsilon\ln\varepsilon}{\varepsilon+1}}_{\to 0} + \underbrace{\ln(1+\varepsilon)}_{\to \ln 1 = 0} \to -\ln 2 \text{ då } \varepsilon\to 0^+$$

Alltså

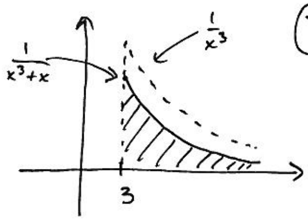
$$\int_1^\infty \frac{\ln(x-1)}{x^2}\,dx = -\ln 2 + \ln 2 = \underline{\underline{0}} \quad (!)$$

konvergent!

Jämförelsesatser:

Ex: Är den generaliserade integralen $\int_3^\infty \frac{1}{x^3+x}\,dx$ konvergent?

Integralen går att räkna ut, men eftersom det innebär lite arbete ska vi försöka avgöra om den är konvergent utan att räkna ut den!



För stora x gäller $\frac{1}{x^3+x} \approx \frac{1}{x^3}$.

$$\int_3^B \frac{1}{x^3}\,dx = \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}\right]_3^B = \underbrace{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{B^2}}_{\to 0} + \frac{1}{18} \to \frac{1}{18},\ B\to\infty$$

så $\int_3^\infty \frac{1}{x^3}\,dx$ konvergent! Vi ser nu att

$$0 \le \frac{1}{x^3+x} \le \frac{1}{x^3} \quad \text{då } x \ge 3 \quad \text{(se figur!)}$$

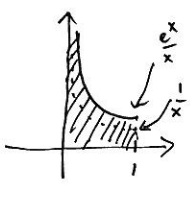
Då gäller även $0 \le \int_3^\infty \frac{1}{x^3+x}\,dx \le \int_3^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{18}$

och det följer att även $\int_3^\infty \frac{1}{x^3+x}\,dx$ konvergent.

Svar: Ja.

Ex: Är $\int_0^1 \frac{e^x}{x}\,dx$ konvergent?

Denna är däremot svår att räkna ut. Här måste vi försöka argumentera som ovan. Denna är generaliserad i $x=0$.



För små x (x nära 0) gäller $\frac{e^x}{x} \approx \frac{1}{x}$.

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln|x|\Big]_\varepsilon^1 = \underbrace{\ln 1}_{0} - \ln\varepsilon \to \infty,\quad \varepsilon\to 0^+$$

så $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ divergent. Vi ser att

$$0 \le \frac{1}{x} \le \frac{e^x}{x} \quad \text{då } x>0. \text{ Då gäller}$$

$$(\text{"}=\infty\text{"})\ \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx \le \int_0^1 \frac{e^x}{x}\,dx, \text{ dvs. även}$$

$\int_0^1 \frac{e^x}{x}\,dx$ är divergent. Svar: Nej.

Sats (Jämförelsesats): ($a, b = \pm\infty$ tillåtet)

Om $0 \le f(x) \le g(x)$ för alla x i integrationsinterv. så

a) $\int_a^b g(x)\,dx$ konv. $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ konv.

b) $\int_a^b f(x)\,dx$ div. $\Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx$ div.

Standardjämförelseintegraler

- $\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ konvergent $\Leftrightarrow \alpha > 1$
- $\int_0^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ konvergent $\Leftrightarrow \alpha < 1$