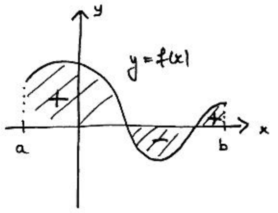
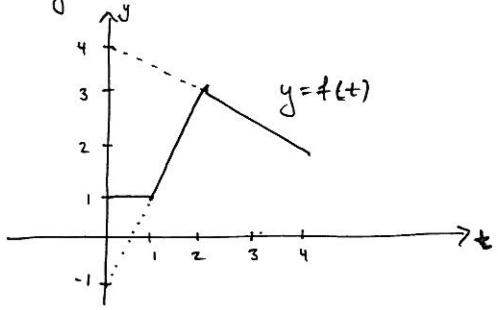
Föreläsning 8:



$\int_a^b f(x)\,dx$ = area under grafen "med tecken"

Ex: Låt $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1 \\ 2t-1, & 1 \le t \le 2 \\ -\frac{1}{2}t+4, & 2 \le t \le 4 \end{cases}$.

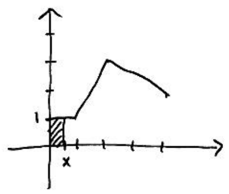
Vi ritar grafen!



Beräkna $\int_0^x f(t)\,dt$ för olika värden på x $(0 \le x \le 4)$.

$0 \le x \le 1$:

$$\int_0^x f(t)\,dt = x \cdot 1 = x.$$

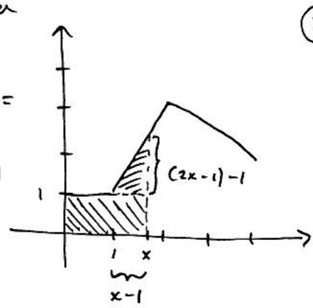


$1 \le x \le 2$:

rektangel, triangel

$$\int_0^x f(t)\,dt = x \cdot 1 + \frac{(x-1)\big((2x-1)-1\big)}{2} =$$

$$= x + x^2 - 2x + 1 = x^2 - x + 1$$

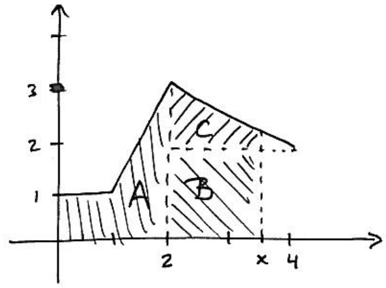


$2 \le x \le 4$:

$\int_0^x f(t)\,dt =$

= area A + area B + area C

Nu ser vi att följande gäller



$$\text{area A} = \int_0^2 f(t)\,dt = 2^2 - 2 + 1 = 3 \quad \text{(enligt formel ovan)}$$

$$\text{area B} = 2(x-2) \quad \text{(area av rektangel)}$$

$$\text{area C} = \frac{2 \cdot 1}{2} - \frac{(4-x)\left(\left(-\frac{1}{2}x+4\right)-2\right)}{2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{4}(4-x)^2 = -3 + 2x - \frac{1}{4}x^2$$

(area av triangel − area av topptriangel)

$$\Rightarrow \int_0^x f(t)\,dt = 3 + 2(x-2) - 3 + 2x - \frac{1}{4}x^2 =$$

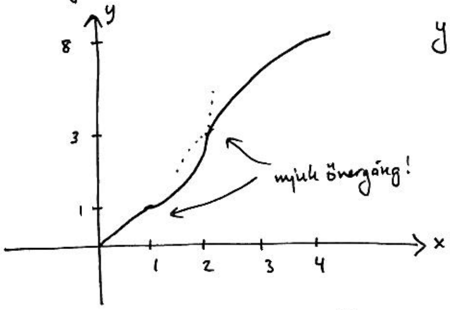
$$= -\frac{1}{4}x^2 + 4x - 4$$

Sammanfattningsvis får vi nu

$$S(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \begin{cases} x & 0 \le x \le 1 \\ x^2 - x + 1 & 1 \le x \le 2 \\ -\frac{1}{4}x^2 + 4x - 4 & 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

Detta är alltså en funktion av x!

Vi ritar grafen för funktionen S(x):



Vad händer om vi deriverar S(x)?

$$S'(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1 \\ 2x-1 & 1 \le x \le 2 \\ -\frac{1}{2}x + 4 & 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

Alltså $S'(x) = f(x)$!

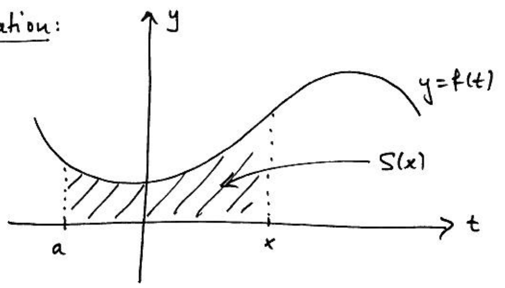
Sats (Analysens huvudsats):

Antag att f är kontinuerlig på intervallet I och att $a \in I$. Funktionen

$$S(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in I,$$

är då deriverbar med derivatan $S'(x) = f(x)$. Med andra ord, S är en primitiv funktion till f.

Illustration:



Observera att S är en funktion av x!

Innan vi kan visa analysens huvudsats behöver vi följande sats (som vi inte bryr oss om att visa):

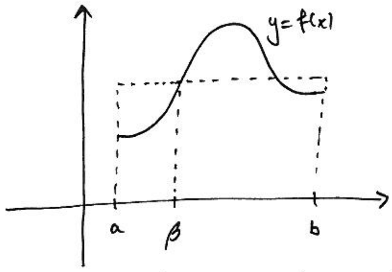
Sats (Integralkalkylens medelvärdessats):

Antag att f är kontinuerlig på $[a,b]$. Då finns (minst) en punkt β $(a \le \beta \le b)$ sådan att

$$f(\beta)(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

(5)

Illustration:



Verkar rimligt att det finns ett tal β sådant att

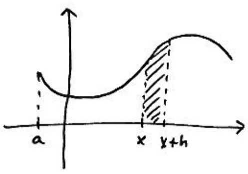
$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{f(\beta)(b-a)}$$

arean av rektangeln

Bevis (analysens huvudsats):

Vi vill beräkna $S'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{S(x+h)-S(x)}{h}$.

$$\frac{S(x+h)-S(x)}{h} =$$



$$= \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right) =$$

$$= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt,$$ där $\int_x^{x+h} f(t)\,dt$ är markerat i figuren.

Enligt integralkalkylens medelvärdessats gäller nu att $\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = \frac{1}{h} f(\beta)\,(\overbrace{(x+h)-x}^{=h}) = f(\beta)$

(6)

för något β mellan x och $x+h$. Nu gäller att

$h \to 0 \Rightarrow \beta \to x \Rightarrow f(\beta) \to f(x)$ eftersom

f är kontinuerlig i x enligt förutsättning.

Sammanfattningsvis har vi visat att

$$S'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{S(x+h)-S(x)}{h} = f(x). \quad \square$$

Ex: $S(x) = \int_1^x e^{-t^2}\,dt$ är en primitiv funktion till $f(x) = e^{-x^2}$, ty

$$S'(x) = \frac{d}{dx}\int_1^x e^{-t^2}\,dt = e^{-x^2}$$ enligt analysens huvudsats.

Anm: En primitiv funktion till $f(x) = e^{-x^2}$ kan ej uttryckas på något annat sätt i elementära funktioner.

Ex: Derivera $f(x) = \int_1^{x^2} \sin t\,dt$.

Detta är faktiskt en sammansatt funktion (fast det kan vara lite svårare att se), så vi kan använda kedjeregeln:

Sätt $g(y) = \int_1^y \sin t\,dt$. Då är $f(x) = g(x^2)$.

(7)

Enligt analysens huvudsats gäller $g'(y) = \sin y$.

Kedjeregeln ger nu

$$f'(x) = g'(x^2)\cdot 2x = \sin(x^2)\cdot 2x$$

inre derivata

Sats (Insättningsformeln): Antag att f är kontinuerlig på intervallet I, och att F där är en primitiv funktion till f. Då är

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

för $a, b \in I$. (Viktig!)

Bevis: Enligt analysens huvudsats gäller att

$S(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ är en primitiv funktion till $f(x)$,

och det är även $F(x)$ enligt förutsättning. Två primitiver skiljer sig åt med en konstant $\Rightarrow S(x) = F(x) + C$.

Men $S(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$

$\Rightarrow 0 = S(a) = F(a) + C$

$\Rightarrow C = -F(a)$. Detta betyder att $S(x) = F(x) - F(a)$.

Vi får nu

$$S(b) = \int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) \quad \square$$

(8)

Anm: Vi använder beteckningen

$$\Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

Ex: Förra föreläsningen beräknade vi

$$\int_0^1 e^x\,dx$$

med hjälp av Riemannsummor. Nu kan vi göra det på ett mycket enklare sätt med hjälp av insättningsformeln:

$$\int_0^1 e^x\,dx = \Big[e^x\Big]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$