Föreläsning 6:

Förra föreläsningen lärde vi oss att beräkna
$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx, \quad f(x), g(x) \text{ polynom.}$$

Strategi: Försök överföra problem till problem med rationell funktion.

Ex:
$$\int \frac{3}{e^x+4}\,dx = \left[\begin{array}{l} t = e^x \iff x = \ln t \\ \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} \implies dx = \frac{1}{t}\,dt \end{array}\right] =$$
$$= \int \frac{3}{t(t+4)}\,dt \overset{*)}{=} \frac{3}{4}\int \frac{1}{t} - \frac{1}{t+4}\,dt =$$
rationell funktion!
$$= \frac{3}{4}\left(\ln|t| - \ln|t+4|\right) + C = \frac{3}{4}\left(x - \ln(e^x+4)\right) + C$$

*)
$$\frac{3}{t(t+4)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+4} \iff$$
$$3 = A(t+4) + Bt \iff 3 = (A+B)t + 4A$$
$$\iff \begin{cases} A+B = 0 \\ 4A = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{3}{4} \\ B = -\frac{3}{4} \end{cases}$$
□

Ex: $(x>1)$
$$\int \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{x-1} \iff x = t^2+1 \ (t>0) \\ \frac{dx}{dt} = 2t \implies dx = 2t\,dt \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{2t}{(t^2+1)t}\,dt = \int \frac{2}{t^2+1}\,dt =$$
rationell funktion
$$= 2\arctan t + C = 2\arctan(\sqrt{x-1}) + C$$

Anm: Denna typ av substitution, dvs. $t = \sqrt{x+\alpha}$, fungerar för alla uttryck i $\sqrt{x+\alpha}$ (och x).

Standardprimitiver:
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2+\alpha}\right| + C \qquad \text{OBS!}$$

Ex:
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+4}}\,dx =$$
$$= \left[\begin{array}{l} t = x+1 \iff x = t-1 \\ \frac{dx}{dt} = 1 \implies dx = dt \end{array}\right] = \int \frac{1}{\sqrt{t^2+4}}\,dt =$$
$$= \ln\left|t + \sqrt{t^2+4}\right| + C = \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right| + C$$

Ex:
$$\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{3\sqrt{1-(\frac{x}{3})^2}}\,dx =$$
$$= \left[\begin{array}{l} t = \frac{x}{3} \iff x = 3t \\ dx = 3\,dt \end{array}\right] = \int \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}\sqrt{1-t^2}}\,dt =$$

$$= \arcsin(t) + C = \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + C.$$

Ex:
$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\,dx = \int \frac{1}{2}\,\frac{2x}{\sqrt{x^2+3}}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\,2\cdot\sqrt{x^2+3} + C = \sqrt{x^2+3} + C$$

Alt. Sätt $t = x^2$ eller $t = x^2+3$.

Ex:
$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx = \ ?$$

Vi provar först med $t = \sqrt{x^2+1}$. Detta ger $x^2+1 = t^2$, dvs. $x = \pm\sqrt{t^2-1}$, och vi får $dx = \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\,dt$
$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx = \int \frac{t^2}{\sqrt{t^2-1}}\,dt = \int \frac{(t^2-1)+1}{\sqrt{t^2-1}}\,dt =$$
$$= \int \sqrt{t^2-1}\,dt + \int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,dt$$
likasvår!

Ej så lyckat! Problemet är att vi har x i kvadrat i sambandet $x^2+1 = t^2$.

Nytt försök: Vi sätter i stället
$$t = x + \sqrt{x^2+1}.$$
Detta ger $t - x = \sqrt{x^2+1} \iff (t-x)^2 = x^2+1 \quad (t>0)$

$$\iff t^2 - 2xt + \cancel{x^2} = \cancel{x^2} + 1 \iff 2xt = t^2 - 1$$
$$\iff x = \frac{t^2-1}{2t} = \frac{t}{2} - \frac{1}{2t}.$$

Vi får $dx = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2t^2}\right)dt = \left(\frac{t^2+1}{2t^2}\right)dt$ och slutligen $\sqrt{x^2+1} = t - x = t - \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{2t}\right) =$
$$= \frac{t}{2} + \frac{1}{2t} = \frac{t^2+1}{2t}.$$

rat. funk.

Således
$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx = \int \frac{t^2+1}{2t}\cdot\frac{t^2+1}{2t^2}\,dt =$$
$$= \int \frac{t^4+2t^2+1}{4t^3}\,dt = \frac{1}{4}\int t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3}\,dt =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{t^2}{2} + 2\ln|t| - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2}\right) + C =$$
$$= \frac{1}{8}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2 + \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| - \frac{1}{8}\,\frac{1}{(x+\sqrt{x^2+1})^2} + C.$$

Anm: Primitiv till ett uttryck i $\sqrt{x^2+ax+b}$ (och x) kan alltid lösas med substitutionen
$$t = x + \sqrt{x^2+ax+b}.$$

Komplexvärda funktioner

Primitiv funktion kan även definieras för komplexvärda funktioner.

Ex: Vi vet att $De^{ix} = ie^{ix}$ inre derivata. (5)

så $\int e^{ix}\,dx = \frac{e^{ix}}{i} + C = \frac{(-i)}{(-i)}\cdot\frac{e^{ix}}{i} + C =$

$= -ie^{ix} + C.$

Primitiver till trigonometriska uttryck:

Problem: Bestäm $\int f(\sin x, \cos x)\,dx$ (dvs. primitiv till ett uttryck i $\sin x, \cos x$).

Ibland fungerar variabelbytet $t = \sin x$ eller $t = \cos x$:

Ex: $\int \cos^3 x\,dx = \left[\begin{array}{l} t = \cos x \iff x = \arccos t \\ (0 \le x \le \pi) \\ \frac{dx}{dt} = \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}} \Rightarrow dx = \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}dt \end{array}\right] =$

$= \int -\frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$, variabelbytet $z = \sqrt{1-t^2}$ fungerar nu ......

Lättare är dock

$\int \cos^3 x\,dx = \int \cos x\,(1-\sin^2 x)\,dx = \left[\begin{array}{l} t = \sin x \\ \frac{dt}{dx} = \cos x,\ dt = \cos x\,dx \end{array}\right] =$

$= \int 1 - t^2\,dt = t - \frac{t^3}{3} + C = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$

Anm: Denna metod fungerar för udda potenser av $\sin x$ & $\cos x$. (6)

Ibland kan man använda en trig. formel:

Ex: $\int \cos^2 x\,dx \overset{*)}{=} \int \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\,dx =$

$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

$\boxed{*)\ \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \iff \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x}$ D

Ett alternativ är att använda Eulers formler (fungerar för alla heltalspotenser):

Ex: $\int \cos^2 x\,dx = \int \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 dx =$

$= \frac{1}{4}\int (e^{ix}+e^{-ix})^2\,dx = \frac{1}{4}\int e^{i2x} + e^{-i2x} + 2\,dx =$

$= \frac{1}{8i}e^{i2x} - \frac{1}{8i}e^{-i2x} + \frac{x}{2} + C =$

$= \frac{1}{4}\cdot\frac{e^{i2x}-e^{-i2x}}{2i} + \frac{x}{2} + C = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{2} + C$ D

OBS! Svaret måste vara reellt.

Om inget annat fungerar, så kan man alltid använda variabelbytet $t = \tan\frac{x}{2}$: (7)

Ex: Antag att vi vill beräkna $\int \frac{1}{\cos x}\,dx$.

Vi sätter $t = \tan\frac{x}{2}$, och får $x = 2\arctan t$ $(-\pi < x < \pi)$.

$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2} \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}dt$

Vidare $\cos x = \cos 2\cdot\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\underbrace{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}}_{=1}} \overset{/\cos^2\frac{x}{2}}{=}$

$= \frac{1 - \left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right)^2}{1 + \left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right)^2} = \frac{1 - \tan^2\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ rat. funk.

Detta ger nu $\int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt =$

$= \int \frac{2}{1-t^2}\,dt = \int \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1}\,dt =$ p. bråkuppd.

$= \ln|t+1| - \ln|t-1| + C = \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + C =$

$= \ln\left|\frac{\tan(\frac{x}{2})+1}{\tan(\frac{x}{2})-1}\right| + C$

Anm: Funktionen $\sin x$ kan vi uttrycka i t på följande sätt: (8)

$\sin x = \sin 2\cdot\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\underbrace{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}}_{=1}} \overset{/\cos^2\frac{x}{2}}{=} \frac{2\,\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{1 + \left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right)^2} =$

$= \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}.$